

Le fini et l'infini mêlés

de π aux zéros de Riemann

Une même erreur de statut, démontrée aux deux extrêmes
et datée dans l'entre-deux

Filipe Bastos

Architecture de la Cohérence Relationnelle (ARC)

D2technologie Inc.

contact@d2technologie.com

Version 1.2, 12 octobre 2026

Résumé

Nous montrons qu'une même erreur de statut traverse l'analyse depuis ses débuts : poser le signe égal entre un objet qui ferme et la limite d'un processus qui ne ferme pas, puis traiter les deux comme un seul objet. Nous l'établissons aux deux extrêmes. À l'extrême le plus simple, π : toute écriture finie de π est un rapport d'entiers, π n'en est aucun, aucune unité ne mesure à la fois le tour et le diamètre d'un cercle, et l'écart entre $22/7$ et π est une aire finie, exacte et positive. À l'extrême le plus vaste, les zéros non triviaux de la fonction zêta : en chacun, la série de Dirichlet diverge et le produit d'Euler ne peut pas valoir zéro ; les zéros ne sont donc les zéros ni de la somme des entiers ni du produit des premiers ; nous l'établissons comme un théorème d'impossibilité. La question de Riemann n'a pas d'objet dans le registre de la somme et du produit ; elle en a un dans le registre du prolongement, qui est celui de la file sans fin. Ce qu'on nomme prolongement n'étend pas la somme : chacune de ses écritures dans la bande avance d'un côté et retire de l'autre (le compte moins l'aire, le continu moins son reste, la somme moins deux fois ses termes pairs, la moitié droite retournée sur la gauche), et le zéro est le point où ce qui avance et ce qui retire coïncident. Entre ces deux extrêmes, nous datons vingt et un gestes, du nombre à la physique et aux machines, qui portent la même marque, et une contre-épreuve. Aucun calcul de l'analyse n'est contesté ; seul le statut des objets l'est. Toutes les identités sont vérifiées, exactement ou numériquement, par un script fourni.

Mots-clés : limite ; fini et infini ; π ; irrationalité ; fonction zêta de Riemann ; produit d'Euler ; prolongement analytique ; statut des objets mathématiques ; cohérence relationnelle

1 Introduction

Depuis la décimale de Stevin (1585), puis le calcul de Newton et de Leibniz et sa refondation par Cauchy et Weierstrass, l'analyse écrit $a = \lim a_n$ et poursuit avec a comme s'il était un objet du même type que les a_n , ou d'un type qu'aucun a_n ne possède. Le signe égal est exact. Le transfert de statut qu'on lui fait porter ne l'est pas.

La thèse de ce travail est que ce transfert est une seule et même erreur, présente aux deux extrêmes des mathématiques et dans tout ce qui passe entre eux. Le premier extrême est l'objet le plus simple : un cercle, et le rapport de son tour à son diamètre. Le second est l'objet le plus vaste : la fonction qui tient à la fois tous les entiers et tous les nombres premiers, et ses zéros. La section 2 pose les principes et les définitions. Les sections 3 et 4 démontrent l'erreur à chaque extrême. La section 5 montre que les deux extrêmes portent la même marque, la section 6 la date dans l'entre-deux, et la section 7 donne une contre-épreuve. Les sections 8 à 10 traitent des objections, des conditions de réfutation et de la portée du travail.

Les théorèmes, propositions et corollaires sont démontrés, ou calculés et vérifiés en annexe B. Les faits sont datés et sourcés. Les lectures sont des interprétations, déclarées comme telles.

2 Principes et définitions

Ce travail repose sur quatre principes.

- **P1. Fermeture.** Un objet fini est un objet qui ferme : un compte, un rapport d'entiers, un cycle accompli.
- **P2. Limite.** Une limite n'est pas un terme de la file qui la définit.
- **P3. Statut.** Un signe égal relie deux valeurs ; il ne transfère pas le statut de l'une à l'autre.
- **P4. Nom.** Deux objets de statut distinct portent deux noms.

P2 est un fait de l'analyse. P1, P3 et P4 sont les principes de l'Architecture de la Cohérence Relationnelle (ARC).

Définition 1 (limite). Une suite (a_n) a pour limite a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $|a_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ (Cauchy, 1821 ; Weierstrass). Aucun terme n'a à atteindre a .

Définition 2 (mélange du fini et de l'infini). Un énoncé mêle le fini et l'infini lorsqu'il emploie une égalité $a = \lim a_n$ pour attribuer à a un statut que seuls les a_n possèdent (être un rapport d'entiers, être la valeur d'une somme, être un compte), ou pour attribuer au processus (a_n) une propriété de a .

Définition 3 (marques). Nous appelons marques de ce mélange : **M1**, un seul nom pour deux objets de statut distinct ; **M2**, une file sans fin terminée par un signe égal ; **M3**, ce que l'instrument fabrique, déclaré propriété de l'objet mesuré.

3 Premier extrême : π

Fait 1. Archimède encadre π entre $223/71$ et $22/7$ (*De la mesure du cercle*, vers 250 avant notre ère). Lambert démontre que π n'est pas un rapport de deux entiers (mémoire lu à l'Académie de Berlin en 1761, publié en 1768). Lindemann démontre que π n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers (1882) ; il s'ensuit qu'aucune construction à la règle et au compas ne carre le cercle.

Proposition 1. *Toute écriture décimale finie de π est un rapport d'entiers : la troncature à N décimales vaut $\lfloor 10^N \pi \rfloor / 10^N$. Aucune n'est égale à π .*

Démonstration. La première assertion est la définition de l'écriture décimale. La seconde suit du théorème de Lambert. $\square$

Corollaire 2. *Aucune unité ne mesure à la fois le tour et le diamètre d'un même cercle.*

Démonstration. Si le diamètre valait a unités et le tour b unités, avec a et b entiers, π serait le rapport b/a , ce que Lambert exclut. $\square$

Proposition 3. *La fraction continue de π commence par $[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots]$. Ses réduites $22/7$, $333/106$, $355/113$, $103\,993/33\,102$ sont des rapports d'entiers de plus en plus proches de π , et la file ne s'arrête pas.*

Théorème 4 (Dalzell, 1944).

$$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx. \quad (1)$$

La division exacte donne

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}, \quad (2)$$

où l'aire du polynôme sur $[0, 1]$ vaut exactement $22/7$ et celle de $4/(1+x^2)$ vaut exactement π . Comme $\frac{1}{2} \leq 1/(1+x^2) \leq 1$ sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx = 1/630 = 4!4!/9!$,

$$\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630}. \quad (3)$$

Théorème 5 (Lucas, 2005).

$$\frac{355}{113} - \pi = \int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8(25+816x^2)}{3164(1+x^2)} dx \approx 2,67 \times 10^{-7}. \quad (4)$$

La division exacte donne de même un polynôme d'aire $355/113$, moins $4/(1+x^2)$.

Proposition 6. Le numérateur $x^4(1-x)^4$ de (1) est invariant sous $x \mapsto 1-x$ et atteint son maximum, $1/256$, au centre $x = \frac{1}{2}$.

Lecture 1. Le cercle ferme ; c'est la règle qui le mesure qui ne ferme pas. Le mot « rapport » désigne ici deux objets : un rapport de deux entiers, qui se compte, et un rapport de deux longueurs dont une seule peut être comptée (corollaire 2) ; c'est la marque M1. Le nombre dit « parfaitement défini » est la limite d'une file de rapports qu'aucun rapport n'atteint (propositions 1 et 3) ; c'est M2. Le reste sans fin, qui vient de la règle, est attribué au cercle, qu'on déclare porteur d'un infini ; c'est M3. L'écart entre le compte et le tour, lui, n'est pas sans fin : c'est une aire finie, portée par la paire $x, 1-x$ autour du centre (théorème 4, proposition 6).

Remarque. Le grec disait des grandeurs sans mesure commune *alogos*, « sans rapport », ou *arrhêtos*, « inexprimable » ; le latin a rendu *logos*, au sens de rapport, par *ratio*, d'où *irrationalis*. Dire que π est « le rapport » du tour au diamètre et qu'il est « irrationnel », c'est dire qu'il est un rapport sans rapport.

4 Second extrême : les zéros de ζ

Notons $s = \sigma + it$, et $S_N(s) = \sum_{n=1}^N 1/n^s$.

Théorème 7 (Euler, 1737). Pour $\sigma > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} 1/n^s = \prod_p (1 - 1/p^s)^{-1}$, le produit portant sur les nombres premiers et convergeant absolument. En particulier

$$|\zeta(s)| \geq \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(\sigma)} > 0 \quad (\sigma > 1), \quad (5)$$

et ζ n'a aucun zéro dans ce demi-plan.

Démonstration. $|1 - 1/p^s| \leq 1 + 1/p^\sigma$, donc $|\zeta(s)| \geq \prod_p (1 + 1/p^\sigma)^{-1} = \prod_p (1 - 1/p^\sigma)/(1 - 1/p^{2\sigma}) = \zeta(2\sigma)/\zeta(\sigma)$. $\square$

Les zéros non triviaux de ζ , ceux que vise l'hypothèse de Riemann (1859), sont dans la bande $0 < \sigma < 1$, où ni la série ni le produit ne convergent ; ζ y désigne le prolongement analytique.

Proposition 8. Pour $\sigma > 0$ et $s \neq 1$, la formule d'Euler et Maclaurin donne

$$S_N(s) = \zeta(s) + \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2N^s} + O\left(\frac{|s|}{N^{\sigma+1}}\right). \quad (6)$$

En tout zéro ρ de la bande, $|S_N(\rho)| \sim N^{1-\sigma}/|1-\rho|$ croît sans borne : la série de Dirichlet diverge en ρ .

Proposition 9. *Un produit de facteurs non nuls n'a pas de zéro de clôture : aucun produit partiel n'est nul. Si ses produits partiels tendent vers zéro, ce zéro est un zéro d'exhaustion, la limite d'une file sans fin, et le produit est dit divergent. Le produit d'Euler ne vaut donc zéro en aucun zéro ρ au sens d'un produit convergent ; en ρ_1 , ses produits partiels ne convergent vers rien.*

Démonstration. Un produit infini converge si ses produits partiels ont une limite finie et non nulle, ce qui équivaut à la convergence de la série de ses logarithmes ; s'ils tendent vers zéro, le produit est dit divergent (Ahlfors, chap. 5). L'exemple $\prod_{k \leq N} k/(k+1) = 1/(N+1)$ montre que des facteurs non nuls peuvent avoir des produits partiels de limite nulle : c'est le zéro d'exhaustion, non un zéro atteint. Les facteurs $(1 - 1/p^\rho)^{-1}$ ne sont jamais nuls, et sur les premiers jusqu'à 2×10^6 le module des produits partiels en ρ_1 oscille entre 10^{-4} et 18,8 sans limite (annexe B). $\square$

Théorème 10. *Pour $0 < \sigma < 1$, $\int_0^N dx/x^s = N^{1-s}/(1-s)$, et donc*

$$\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \int_0^N \frac{dx}{x^s} \right). \quad (7)$$

Au premier zéro, $\rho_1 = \frac{1}{2} + 14,134725... i$, la somme et l'intégrale ont toutes deux le module 223,58 pour $N = 10^7$; leur écart vaut $1,58 \times 10^{-4}$ et décroît comme $1/(2\sqrt{N})$; une fois retiré le terme $1/(2N^{\rho_1})$, il vaut $3,7 \times 10^{-11}$ (annexe B).

Théorème 11 (impossibilité). *En aucun zéro non trivial ρ , ni la somme des entiers ni le produit des premiers ne valent zéro : la somme y diverge, et le produit ne peut pas s'annuler. Les zéros non triviaux de ζ ne sont donc les zéros d'aucun des deux objets qui font de ζ la fonction des entiers et des nombres premiers.*

Démonstration. Propositions 8 et 9. $\square$

Théorème 12 (les portes du prolongement). *Pour $\sigma > 0$ et $s \neq 1$, notons $[x]$ la partie entière de x , qui compte les entiers jusqu'à x , et $\{x\} = x - [x]$ son reste. Alors*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx, \quad (8)$$

et le second membre est analytique pour $\sigma > 0$: c'est l'écriture qui définit ζ dans la bande. Les écritures classiques de ζ dans la bande sont de quatre formes, et chacune porte une part attribuée au continu et un reste qui, en un zéro, l'annule :

- (i) *le compte moins l'aire, (7) ;*
- (ii) *le continu moins le compte, (8) : le compte des entiers $[x]$ est retiré de x , et seul le reste $\{x\}$ demeure sous l'intégrale ;*
- (iii) *la somme moins deux fois ses termes pairs :*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^s},$$

d'où $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \eta(s)$, où la série alternée η converge pour $\sigma > 0$;

- (iv) *la moitié droite retournée sur la gauche : $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$, qui définit ζ à gauche de la bande par sa valeur en $1-s$.*

La formule d'Hermite,

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + 2 \int_0^\infty \frac{\sin(s \arctan x)}{(1+x^2)^{s/2} (e^{2\pi x} - 1)} dx, \quad (9)$$

est la forme close de (i) : c'est la formule d'Abel et Plana appliquée à x^{-s} , la somme moins l'intégrale, et le dénominateur $e^{2\pi x} - 1$ en est la signature. En ρ_1 , la part attribuée au continu vaut $\frac{1}{2} + 1/(\rho_1 - 1) = 0,4975 - 0,0707i$ et le reste l'annule exactement, chiffre pour chiffre (annexe B).

Démonstration. Pour (8), voir l'annexe A.3; (i) est le théorème 10; (iii) s'obtient pour $\sigma > 1$ en séparant les termes pairs, puis s'étend par unicité; (iv) est l'équation fonctionnelle de Riemann (1859); (9) est dans Titchmarsh, §2.3. $\square$

Corollaire 13 (le zéro). *En tout zéro non trivial ρ ,*

$$\frac{1}{\rho - 1} = \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\rho+1}} dx. \quad (10)$$

Pour $\sigma > 1$, $1/(s-1)$ est l'aire $\int_1^\infty dx/x^s$ du continu; dans la bande cette aire diverge, et $1/(\rho-1)$ est la valeur qu'on lui attribue. Le zéro est le point où l'aire du reste égale la valeur attribuée à l'aire divergente du continu. Au premier zéro, les deux membres coïncident à 3×10^{-12} près (annexe B).

Corollaire 14 (le dilemme). *Aucun objet ne porte à la fois les deux énoncés « ζ est la somme des entiers et le produit des premiers » et « $\zeta(\rho) = 0$ ». Si ζ désigne la série ou le produit, $\zeta(\rho) = 0$ est faux (théorème 11). Si ζ désigne le prolongement, $\zeta(\rho) = 0$ est vrai, mais ζ n'est en ρ ni la série ni le produit : c'est une écriture où ce qui avance et ce qui retire se compensent (théorème 12). La question de Riemann n'a donc pas d'objet dans le registre de la somme et du produit; elle en a un dans le registre du prolongement, et ce registre est celui de la file sans fin : les zéros y sont reliés aux premiers par une soustraction infinie, (11) ci-dessous. Le corollaire porte sur le statut de cette relation, non sur son existence.*

Fait 2. Les zéros sont rattachés aux nombres premiers par la formule explicite (Riemann, 1859; von Mangoldt, 1895) :

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{x^2} \right), \quad (11)$$

où ψ est le compte pondéré des puissances de premiers jusqu'à x . La somme sur les zéros ne converge que si l'on range les zéros par hauteur croissante.

Lecture 2. Le produit d'Euler, qui garde les tours de chaque premier, ne s'annule jamais (théorème 7). Les zéros n'existent que pour un objet qui n'est plus ce produit, et ils ne rejoignent les premiers que par une soustraction, celle de (11), sous la forme d'une nouvelle file sans fin. Ce qu'on nomme prolongement n'étend pas la somme : chacune de ses écritures retire ce qu'elle avance (théorème 12), et donner le nom de prolongement à cette opération est la marque M1. La lettre ζ désigne trois objets : la somme, le produit, le prolongement (M1). Posée comme question sur la somme des entiers et le produit des premiers, la question de Riemann n'a pas d'objet (théorème 11); posée sur le prolongement, elle en a un, dont le statut est la file sans fin. Le zéro est la limite d'un écart entre deux quantités qui croissent sans fin (M2). Ce que le prolongement fabrique est déclaré propriété des premiers (M3).

5 Les deux extrêmes portent la même marque

Proposition 15. π et les zéros non triviaux de ζ portent tous deux les marques M1 et M2.

Démonstration. Pour π : M1 par le corollaire 2 et la remarque de la section 3; M2 par les propositions 1 et 3. Pour ζ : M1 par le corollaire 14; M2 par le théorème 10. $\square$

Lecture 3. Les deux extrêmes portent aussi la marque M3 : le reste sans fin de la règle est attribué au cercle (lecture 1); les zéros du prolongement sont attribués aux premiers (lecture 2). Les trois marques sont trois faces d'un seul geste : traiter la limite d'un processus sans fin comme l'objet fini qu'elle approche.

6 L'entre-deux

Lecture 4. Si les deux extrêmes portent le même mélange, la thèse de l'auteur est que tout ce qui passe entre eux le porte aussi. Le tableau 1 date vingt et un gestes, du nombre à la mesure, à la physique, au vivant, à la société et aux machines. Pour chacun, la date et l'auteur sont des faits; la marque est une lecture; la dernière colonne renvoie à l'entrée du *Registre des Erreurs* du corpus ARC (Bastos, 2026) où le geste est inscrit et sourcé.

Tab. 1 : Vingt et un gestes de l'entre-deux.

Date	Geste	Où entre la marque	Marque	Registre
v. 500 av. n. è.	Pythagoriciens : la diagonale	un rapport de deux longueurs déclaré « sans rapport »	M1, M3	R.23
628	Brahmagupta : $a \times 0 = 0$	le zéro qui scelle un tour et le zéro du rien sous un même signe	M1	R.3
1585	Stevin, <i>De Thiende</i>	un tiers écrit comme une queue décimale sans fin	M2	R.27
1614	Neper; puis $e = \lim(1 + 1/n)^n$	un nombre défini comme terme final d'une suite infinie	M2	R.33
v. 1684	Newton, Leibniz : la dérivée	h nul pour le résultat, non nul pour la division	M1, M2	R.40
dès 1684	le calcul intégral	une aire comme somme d'une infinité de tranches d'épaisseur nulle	M2	R.41
1801	Gauss : $9 \equiv 0$	le tour accompli et le vide sous un même signe; le compte des tours jeté	M1, M3	R.1, R.2
1809	Gauss : la cloche et les moindres carrés	une loi continue à la place d'un compte fini de cas; le carré jette le signe	M2, M3	R.20, R.155
1822	Fourier	un signal fini écrit comme une somme infinie de fréquences; la position dans le temps perdue	M2, M3	R.44
1852–1877	Kelvin, Clausius, Boltzmann	un état final atteint en un temps infini; le cycle accompli lu comme néant	M1, M2	R.48
1859	Darwin	l'ignorance de la cause des variations promue propriété du monde	M3	R.110
1872–1874	Dedekind, Cantor	la droite réelle bâtie sur des coupures et des ensembles infinis achevés	M2	R.19
XIX ^e s.	la mort pensée comme effacement	le zéro du rien posé sur un cycle accompli	M1	R.134

Date	Geste	Où entre la marque	Marque	Registre
1926	Born : $ \psi ^2$	le carré jette la phase ; un espace de dimension infinie posé comme nécessaire	M2, M3	R.69, R.70, R.87
1934	Kuznets : le revenu national, puis le PIB	la circulation mesurée avec la règle de la croissance, le geste de π	M3	R.143
1947–1949	renormalisation de l'électrodynamique quantique	des infinis engendrés par le cadre, soustraits l'un de l'autre	M2	R.100
1948	Schwinger : $\alpha/2\pi$	une valeur écrite comme somme sans fin de corrections	M2	R.105
1976	cryptographie à clé publique	la sécurité tient au compte des tours jeté par le repliement	M3	lecture
1979	la volatilité électorale	ce que l'instrument a jeté nommé propriété du peuple	M3	R.137
1985	la norme IEEE 754	la queue de Stevin coupée à chaque opération	M2	R.28
2017–2020	les grands modèles de langage	le mot suivant calculé sans mémoire du chemin	M3	R.144

7 Contre-épreuve et écriture qui ferme

Fait 3. Huygens traite le calcul des chances comme une somme finie de cas (*De ratiociniis in ludo aleae*, 1657), la force centrifuge (1659) et le pendule cycloïdal (*Horologium oscillatorium*, 1673) par des triangles semblables et l'ombre du cercle, sans passer par la limite de Newton et de Leibniz.

Lecture 5. La contre-épreuve établit deux choses. Le geste n'est pas nécessaire : le mouvement a été mesuré sans lui. Et il est daté : il entre à des moments précis, par des mains précises, ce qui permet de le retirer.

Proposition 16. *Tout entier $n \geq 1$ s'écrit de façon unique $n = 9k + \text{DR}(n)$, avec $k \geq 0$ entier et $\text{DR}(n) \in \{1, \dots, 9\}$ la racine numérique de n . L'application $n \mapsto (k, \text{DR}(n))$ est injective, alors que la réduction de n à son reste selon 9, de valeurs 0 à 8, ne l'est pas.*

Remarque. L'écriture de la proposition 16 ferme sans limite : le cycle de neuf positions se clôt en 9, et le compte k des tours accomplis est gardé. Elle distingue le zéro qui scelle un tour accompli du zéro d'épuisement, que la congruence confond. C'est l'écriture de l'ARC ; elle n'a pas besoin du signe égal posé au bout d'une file sans fin pour dire ce qu'est un objet.

8 Les deux lectures du compte des premiers

Fait 4. Pour $N \geq 1$, soit $A(N)$ le nombre d'entiers de 1 à N sans facteur carré ayant un nombre pair de facteurs premiers distincts (1 compris), et $B(N)$ le même compte pour un nombre impair. Alors $M(N) = A(N) - B(N)$ est la fonction de Mertens, et l'hypothèse de Riemann équivaut à $M(N) = O(N^{1/2+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ (Titchmarsh, §14.25). La conjecture de Mertens, $|M(N)| < \sqrt{N}$ pour tout N , est fausse (Odlyzko et te Riele, 1985), avec un premier contre-exemple au-delà de 10^{16} .

Proposition 17. *$A(N) + B(N)$ est le nombre d'entiers sans facteur carré jusqu'à N , égal à $6N/\pi^2 + O(\sqrt{N})$; et, avec $D = |A - B|$ et $C = \min(A, B)$, $A + B = D + 2C$. Pour $N = 10^6$: $A + B = 607\,926$, $6N/\pi^2 = 607\,927$, $A = 304\,069$, $B = 303\,857$, $A - B = 212$ (annexe B).*

Lecture 6. A et B sont deux comptes finis, exacts, qui gardent leur rang N . Leur somme est gouvernée par π : le premier extrême revient dans le second. Leur écart est gouverné par les zéros, et l'hypothèse de Riemann dit que cet écart ne dépasse pas la racine de leur somme. La fonction de Möbius, qui écrit chaque entier sans facteur carré $+1$ ou -1 , est un pli : elle garde la parité et jette le nombre de facteurs ; M ne garde que l'écart, et l'identité $A + B = D + 2C$ montre ce que l'écart seul jette, la part commune C . L'objet complet est le couple (A, B) , qui tient le compte entier. La chute de la conjecture de Mertens au-delà de 10^{16} , alors que le rapport $|M|/\sqrt{N}$ reste sous 0,9 jusqu'à 10^6 , son maximum étant atteint en $N = 5$, est un rappel : on ne classe pas sur la première fenêtre. Ce que la structure (A, B) permet de contrôler sur l'écart est un chantier déclaré, et c'est la cible arithmétique du corpus pour ce problème.

9 Objections et réponses

Objection. Le prolongement analytique de ζ est unique ; $\zeta(\rho) = 0$ est un énoncé parfaitement défini.

Réponse. C'est la seconde branche du corollaire 14. L'énoncé est défini, et le prolongement est unique (théorème d'identité des fonctions analytiques). Mais le théorème 12 montre comment il est construit : chacune de ses écritures dans la bande retire ce qu'elle avance. L'unicité dit que toutes ces écritures donnent la même fonction ; elle ne dit pas que cette fonction prolonge la somme des entiers, qui en ρ diverge. Ce travail conteste un transfert de statut, celui qui fait des zéros du prolongement « les zéros de la fonction des nombres premiers », et non une définition.

Objection. Des facteurs non nuls peuvent avoir des produits partiels de limite nulle ; la proposition 9 repose sur une convention.

Réponse. Oui, et la convention est celle de la pièce : une limite nulle de produits partiels est un zéro d'exhaustion, la file sans fin terminée par un signe égal (M2), non un zéro de clôture. La proposition le dit désormais, et le calcul en ρ_1 montre que les produits partiels d'Euler n'y ont pas de limite du tout.

Objection. La formule explicite et l'équivalence de l'hypothèse de Riemann avec $\pi(x) = \text{Li}(x) + O(\sqrt{x} \log x)$ relient bien les zéros aux premiers ; la question a donc un objet arithmétique.

Réponse. Elle en a un, et le corollaire 14 dit lequel et de quel statut : une relation par soustraction infinie, dans le registre du prolongement. Ce que la pièce refuse est le transfert de ce statut à la somme et au produit. La section sur les deux lectures du compte des premiers donne à cet objet sa forme la plus fermée, deux comptes finis et leur écart.

Objection. Depuis Cauchy et Weierstrass, la limite ne fait intervenir aucun infini actuel.

Réponse. Précisément : la définition 1 n'atteint jamais sa limite. L'erreur n'est pas dans la définition ; elle est dans l'usage de l'égalité pour transférer un statut (définition 2) : appeler π un rapport, appeler $\zeta(\rho)$ une valeur de la somme des entiers.

Objection. π est parfaitement défini, par exemple comme le double du premier zéro positif du cosinus.

Réponse. Défini, oui ; la question est son statut. Les définitions usuelles de π passent toutes par un processus sans fin : la longueur d'un arc, borne supérieure des périmètres inscrits ; la série entière du cosinus ; une intégrale. Le théorème de Lindemann garantit qu'aucune construction algébrique finie à partir des entiers ne le donne.

Objection. Les calculs qui en découlent fonctionnent : la renormalisation donne douze chiffres justes.

Réponse. Ce travail ne conteste aucun calcul. Il conteste le statut de ce qui est soustrait, et de ce qui est déclaré propriété du monde.

10 Conditions de réfutation

- La lecture 1, selon laquelle π est une relation entre le cercle et la droite et non un compte, serait réfutée par une construction de π en un nombre fini d'opérations algébriques à partir des entiers. Le théorème de Lindemann l'exclut.
- Le théorème 11 et le corollaire 14 seraient réfutés par un zéro non trivial où la série de Dirichlet converge, ou par un produit de facteurs non nuls qui converge vers zéro ; la proposition 8 et la définition d'un produit convergent excluent l'un et l'autre. Leurs preuves valent en tout zéro de la bande ; l'annexe B les vérifie au premier.
- La lecture du théorème 12, selon laquelle le prolongement retire ce qu'il avance, serait réfutée par une écriture de ζ dans la bande sans part attribuée au continu ni reste qui l'annule aux zéros, et sans retournement de s en $1 - s$; la formule d'Hermite (9) ne la réfute pas, elle la vérifie.
- La lecture 6 serait affaiblie par une borne sur $|A - B|$ obtenue sans aucune information sur $A + B$, ou par un contrôle de l'écart qui ne passe par aucun zéro.
- La lecture 4 se réfute ligne par ligne. Toute ligne du tableau 1 dont le geste se réalise sans processus sans fin, sans carré qui jette un signe et sans zéro du rien, en donnant les mêmes objets, est retirée. Toute découverte de l'entre-deux qui ne porte aucune marque compte contre la thèse.

11 Portée et limites

Ce travail ne conteste ni Lambert, ni Lindemann, ni aucun calcul sur ζ . Il ne tranche pas l'énoncé de Riemann sur les zéros du prolongement ; il démontre que, posée sur la somme des entiers et le produit des premiers, la question n'a pas d'objet, comme Lindemann a démontré qu'on ne carre pas le cercle, et il nomme le statut de l'objet qu'elle a dans le registre du prolongement. Il ne dit pas que les découvertes du tableau 1 sont fausses, leurs calculs tenant dans la langue où elles ont été faites. Les identités d'Euler, de Dalzell, de Lucas, la formule d'Euler et Maclaurin, la formule (8), l'équation fonctionnelle et la formule explicite ne sont pas de l'auteur. Sont de l'auteur : la définition 2, les marques, leur assemblage d'un extrême à l'autre, et les lectures, déclarées comme telles.

12 Conclusion

Aux deux extrêmes des mathématiques, la même égalité donne au même objet deux statuts incompatibles. π est appelé rapport et démontré sans rapport : aucune de ses écritures finies n'est π , aucune unité ne mesure à la fois le tour et le diamètre, et son écart au compte le plus simple, $22/7$, est une aire finie. Le zéro de ζ n'est ni celui de la somme des entiers, qui diverge, ni celui du produit des premiers, qui ne peut pas s'annuler : c'est la limite de l'écart entre un compte et une aire qui croissent sans borne. Posée sur la somme des entiers et le produit des premiers, la question de Riemann n'a donc pas d'objet : c'est un théorème d'impossibilité. Posée sur le prolongement, elle a pour objet une file sans fin, et sa forme la plus fermée est l'écart de deux comptes finis, $A(N) - B(N)$, dont la somme est gouvernée par π . Et ce qu'on nomme prolongement n'est pas un prolongement : c'est un aller et un retour tirés ensemble.

Résultat principal. L'erreur n'est pas dans les calculs ; elle est dans le statut. Elle consiste à traiter la limite d'un processus sans fin comme l'objet fini qu'elle approche. Elle se démontre aux deux extrêmes et se date dans l'entre-deux. Une écriture qui ferme en gardant le compte de ses tours, $n = 9k + DR(n)$, n'a pas besoin de la limite pour dire ce qu'est un objet.

A Démonstrations complémentaires

A.1. Formule d'Euler et Maclaurin. Pour $\sigma > 0$, $s \neq 1$, la sommation d'Euler et Maclaurin appliquée à $1/x^s$ sur $[1, N]$ donne (6) (Titchmarsh, §2.1). Comme $\zeta(\rho) = 0$ et $|N^{1-\rho}/(1-\rho)| = N^{1-\sigma}/|1-\rho|$, $|S_N(\rho)|$ croît comme $N^{1-\sigma}$, d'où la proposition 8. Pour $0 < \sigma < 1$, l'intégrale $\int_0^1 dx/x^s$ converge et vaut $1/(1-s)$, d'où $\int_0^N dx/x^s = N^{1-s}/(1-s)$ et (7).

A.2. Divisions exactes. Pour (2), l'aire du polynôme vaut $\frac{1}{7} - \frac{4}{6} + 1 - \frac{4}{3} + 4 = \frac{22}{7}$, et $\int_0^1 4/(1+x^2) dx = 4 \arctan 1 = \pi$. La division de $x^8(1-x)^8(25+816x^2)/3164$ par $1+x^2$ laisse de même le reste constant 4, retranché, et un polynôme d'aire $355/113$; le script de l'annexe B effectue les deux divisions en fractions exactes.

A.3. La formule (8). Pour $\sigma > 1$, la sommation d'Abel donne $\sum_{n \leq N} 1/n^s = \lfloor N \rfloor / N^s + s \int_1^N \lfloor x \rfloor dx/x^{s+1}$. En écrivant $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$, on obtient $\sum_{n \leq N} 1/n^s = N^{1-s} - \{N\}/N^s + \frac{s}{s-1}(1 - N^{1-s}) - s \int_1^N \{x\} dx/x^{s+1}$, puis (8) quand $N \rightarrow \infty$. Comme $0 \leq \{x\} < 1$, l'intégrale converge absolument pour $\sigma > 0$, ce qui donne le prolongement à la bande (Titchmarsh, §2.1). En un zéro ρ , (8) s'annule et $\rho \neq 0$, d'où (10).

B Retraits et remplacements de la v1.1 à la v1.2

Chaque ligne retirée est remplacée, selon la règle du corpus.

- Retiré : « un produit infini de facteurs non nuls ne peut pas converger vers zéro ». Remplacé par la proposition 9 : pas de zéro de clôture ; une limite nulle est un zéro d'exhaustion ; en ρ_1 , pas de limite.
- Retiré : « posée comme question sur les nombres premiers, la question de Riemann n'a pas d'objet ». Remplacé par : pas d'objet dans le registre de la somme et du produit ; un objet dans le registre du prolongement, dont le statut est la file sans fin (corollaire 14).
- Retiré : le critère « signe alterné » du théorème 12. Remplacé par : une part attribuée au continu et un reste qui l'annule ; la formule d'Hermite (9) est inscrite comme forme close de la porte (i).
- Ajouté : la section sur les deux lectures du compte des premiers (fait 4, proposition 17, lecture 6).

C Vérification

Le script `fini_infini_verif.py` (Python 3, `fractions`, `numpy`, `scipy`), distribué avec ce document, refait chaque calcul cité. Les calculs sur π sont exacts, à partir d'un encadrement de π à 10^{-62} près. Les calculs sur ζ sont numériques en double précision.

Vérification	Résultat
Troncatures décimales de π (62)	toutes des entiers sur des puissances de 10
Fraction continue, 12 premiers quotients	$[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1]$, identiques sur les deux bornes
Réduites	$22/7$, $333/106$, $355/113$, $103\,993/33\,102$; aucune égale à π
Archimède	$223/71 < \pi < 22/7$
Dalzell, division exacte	aire du polynôme = $22/7$; reste $4/(1+x^2)$

Vérification	Résultat
Dalzell, encadrement	$1/1260 < 22/7 - \pi = 0,0012644892673 < 1/630$
Lucas, division exacte	aire du polynôme = $355/113$; écart $2,668 \times 10^{-7}$
Symétrie du numérateur	$P(1-x) = P(x)$ coefficient par coefficient ; maximum $1/256$ en $\frac{1}{2}$
Euler, $\sigma = 1,1$, $0 \leq t \leq 200$	$\min \zeta = 0,3769 > \zeta(2,2)/\zeta(1,1) = 0,1408$
Premier zéro	$ \zeta(\rho_1) < 10^{-14}$
Croissance de $ S_N(\rho_1) $	$2,24; 70,70; 223,58$ pour $N = 10^3, 10^6, 10^7$; $ 1 - \rho_1 = 14,14$
Aire $\int_0^{1000} dx/x^{\rho_1}$	égale à $N^{1-\rho_1}/(1-\rho_1)$ à 10^{-15} près
Écart en $N = 10^7$	$1,58 \times 10^{-4}$; $3,7 \times 10^{-11}$ après le terme $1/(2N^{\rho_1})$
Formule (8)	écart à $\zeta : 0$ en $s = 2$; $1,2 \times 10^{-10}$ en $s = 0,3 + 2i$; $3,7 \times 10^{-11}$ en ρ_1
Corollaire 13	$1/(\rho_1 - 1)$ et $\int_1^\infty \{x\} dx/x^{\rho_1+1}$ égaux à 3×10^{-12} près
Porte (iii), $s = 2$	$\eta(2) = (1 - 2^{-1}) \zeta(2) = \pi^2/12$
Proposition 16	injectivité de $n \mapsto (k, \text{DR}(n))$ pour $n \leq 10^5$
Produits partiels d'Euler en ρ_1	module entre 10^{-4} et $18,8$ sur les premiers jusqu'à 2×10^6 , sans limite
Hermite (9)	$\pi^2/6$ en $s = 2$ à 10^{-15} ; $ \zeta(\rho_1) = 4,5 \times 10^{-12}$; le reste annule le pôle
Mertens	$A(10) = 3$, $B(10) = 4$; à 10^6 : $A + B = 607\,926$, $6N/\pi^2 = 607\,927$, $M = 212$, $A + B = D + 2C$; $\max M /\sqrt{N} = 0,89$ pour $2 \leq N \leq 10^6$
Tableau 1	21 lignes, chacune avec au moins une marque

Références

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3^e éd., McGraw-Hill, 1979, chap. 5.
- [2] Archimède, *De la mesure du cercle*, vers 250 avant notre ère.
- [3] F. Bastos, *Registre des Erreurs*, version 1.3, corpus ARC, Zenodo, 2026.
- [4] A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Paris, 1821.
- [5] D. P. Dalzell, « On $22/7$ », *Journal of the London Mathematical Society* 19 (1944), 133–134.
- [6] L. Euler, « Variae observationes circa series infinitas », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 9 (1737, publié en 1744), 160–188.
- [7] C. Huygens, *Horologium oscillatorium*, Paris, 1673.
- [8] J. H. Lambert, « Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1761, publié en 1768.
- [9] F. Lindemann, « Über die Zahl π », *Mathematische Annalen* 20 (1882), 213–225.
- [10] S. K. Lucas, « Integral proofs that $355/113 > \pi$ », *Gazette of the Australian Mathematical Society* 32 (2005), 263–266.
- [11] H. von Mangoldt, « Zu Riemanns Abhandlung “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse” », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 114 (1895), 255–305.

- [12] A. M. Odlyzko, H. J. J. te Riele, « Disproof of the Mertens conjecture », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 357 (1985), 138–160.
- [13] B. Riemann, « Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse », *Monatsberichte der Berliner Akademie*, novembre 1859.
- [14] S. Stevin, *De Thiende*, Leyde, 1585.
- [15] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2^e éd. revue par D. R. Heath-Brown, Oxford, 1986.

Contributions. Modèle, questions, lectures et règles : Filipe Bastos. Scribe : Claude, sous la contradiction de l’auteur. Calculs, formulations et audits assistés par IA (ChatGPT, Gemini, DeepSeek, GLM), à sa demande.

Licence : CC BY 4.0, libre de partager et d’adapter avec attribution.

Contact : contact@d2technologie.com