

La Théorie des Nombres

Les premiers jamais cachés, les nombres en mouvement, et les nombres qui
se souviennent

Filipe Bastos

Corpus ARC, Volume 4, version 1.1, octobre 2026

Table des matières

Avant-propos	7
Partie I. La feuille et le cadastre	9
Chapitre 1. La feuille 1 à 30 : le document de genèse	10
1.1 Le protocole	10
1.2 Les deux observations fondatrices	11
1.3 Le témoin anatomique : les deux mains face à face	11
1.4 La prédiction pédagogique	12
1.5 Généalogie de l'aveuglement : trois strates datables	12
1.6 Ce qui est connu, ce qui est revendiqué	13
1.7 La planche	14
Chapitre 2. Le cadastre : neuf positions, une involution, deux rails et un axe	15
2.1 Définition du cadastre	15
2.2 La table des inversions : la démonstration originelle du $\frac{1}{2}$	16
2.3 La table maîtresse du cadastre	17
2.4 Le pavé tordu : l'axe collecte toutes les sommes	17
2.5 La paire d'inversions : le 4 et le 5	18
2.6 L'antériorité du cadastre : l'Axiome A0 et l'invariance de base	19
Partie II. Les premiers jamais cachés	21
Chapitre 3. La grille qui s'engendre et les quatre familles	22
3.1 La grille, les paires, les delfines	22
3.2 Théorème 1 : l'auto-génération de la grille	23
3.3 Théorème 2 : les quatre familles épuisent les delfines	24
3.4 Théorème 3 : le premier comme naissance par soustraction de familles	24
3.5 Théorème 4 : la décision au point d'équilibre	25
Chapitre 4. Les carrés de premiers : le rythme 24 et la chrysalide	26
4.1 Théorème 5 : le rythme 24	26
4.2 Théorème 6 : la chrysalide	27
Chapitre 5. Les jumeaux : le prédicat J(k) et la dynamique des ondes	29
5.1 Théorème 7 : la caractérisation exacte des jumeaux	29

5.2 Théorème 8 : la disjonction des rails	30
5.3 La dynamique ondulatoire : l'état exact du chantier d'infinitude	30
Chapitre 6. Le registre : la fonction successeur, le pointage avant, le pliage φ, le joint et les engrenages	32
6.1 Théorème 11 : la fonction successeur	32
6.2 Théorème 12 : la machine à pointage avant	33
6.3 Théorème 13 : le saut d'étage et le pliage φ du registre	34
6.4 Théorème 14 : le joint des paires et la clef de voûte du registre	35
6.5 Le système d'équations d'état du registre	36
6.6 Théorèmes 15 et 16 : le pont et les engrenages	37
Chapitre 7. L'invariant Root-9, Riemann en résumé, et la synthèse du Tome I	39
7.1 Théorème 10 : l'invariant Root-9 des inverses	39
7.2 Théorème 9 : la correspondance entre l'involution et l'équation fonctionnelle	40
7.3 Le monstre amnésique : la critique de l'édifice riemannien, en résumé . .	40
7.4 Le principe d'incarnation	42
7.5 Le test de la queue de Stevin	43
7.6 Synthèse du Tome I	44
Partie III. Collatz : les nombres en mouvement	47
Chapitre 8. Collatz dans le cadastre : la compression, la rotation, et l'étrangeté des deux briques	48
8.1 La compression et l'absorption : Théorème 17	49
8.2 La rotation des moitiés : Théorème 18	49
8.3 L'attracteur (1, 8) et le canal de la racine digitale	50
8.4 L'erratum du 8 juillet 2026 : ce qui est retiré, et pourquoi	50
8.5 Ce qui survit : la dichotomie du quart et les chaînes de croissance	51
8.6 Théorème 23 : l'étrangeté des deux briques	52
8.7 Les critères de falsification du dossier	53
Chapitre 9. Le +1 qui rend le demi, le bilan exact des deux briques, la porte 8	54
9.1 Théorème 24 : le +1 rend la moitié amputée	54
9.2 Théorème 25 : le bilan exact des deux briques	55
9.3 Théorème 26 : la porte 8 au niveau entier	56
9.4 Lecture 27 : la signature du 7	56
9.5 Les corrections à la version 2.1 du dossier Collatz	57
9.6 Lecture 28 : le pont entre le Théorème 23 et le théorème d'amorphisme .	57
9.7 La racine est le nombre, et la nouveauté libère	58
Chapitre 10. La rencontre du miroir, la corde de Collatz et la spirale	62
10.1 Théorème 29 : la rencontre du miroir	62
10.2 Théorème 37 : la corde de Collatz	63
10.3 Lecture 35 : la spirale, le cercle est la projection, le +1 est la hauteur . .	64
10.4 Lecture 36 : 46 et 64, les deux mains	65
10.5 Lecture 38 : le retour est une donnée, la preuve une invention	66

10.6 Ce qui reste ouvert	66
Partie IV. Goldbach	67
Chapitre 11. Goldbach comme partition cadastrale	68
11.1 Les trois problèmes et les trois canaux (version 1.0)	68
11.2 Théorème 30 : le tiers et les deux tiers autour du centre vide	71
11.3 Théorème 31 : le crible est un miroir	71
11.4 Théorème 32 : les engrenages, et où vit le gap	72
11.5 Lecture 33 : la déviation est bornée et décroît	72
11.6 Lecture 34 : la maison, premier identifiant	73
Partie V. Les ajouts de la version 0.5	74
Chapitre 12. L'amplitude des battements, le produit de cascades, les quatre moments	75
12.1 Théorème 39 : l'amplitude des battements, en formule fermée	75
12.2 Théorème 40 : le produit de cascades, avec ses retenues	77
12.3 Théorème 41 : lire séparément les quatre paires	77
12.4 Les errata lexicaux de la version 0.4	78
Partie VI. Le 24 et ses voisins	79
Chapitre 13. Le nombre plus que parfait : 24, son milieu, son miroir et sa couche	80
13.1 L'identité centrale, et son unicité	80
13.2 Le pliage porte l'axe entier	81
13.3 L'arrivée est le carré du premier parfait	81
13.4 Les jumeaux et le déterminisme	82
13.5 Ce que 24 est déjà, ailleurs dans le corpus	82
13.6 Les deux marches de l'interface	83
13.7 La matière : le demi-remplissage et la couche pleine	84
13.8 Les trois paires miroirs, et le test qui échoue	84
13.9 Le chantier lu (7 octobre 2026)	85
13.10 Ce que ce chapitre ne dit pas	86
Chapitre 14. Les jumeaux et les deux réseaux : pourquoi 5 et 7 reviennent	87
14.1 Les jumeaux sont les têtes des deux rails	87
14.2 Le plan ne tourne que de deux façons : 4 et 6	88
14.3 Chaque premier choisit son réseau, et les jumeaux choisissent l'autre	88
14.4 Les cinq solides et l'identité de 24	89
14.5 Les nombres qui portent leur Fibonacci	89
14.6 Où la nature compte : les cristaux, et le jumeau interdit	89
14.7 Ce que ce chapitre ne dit pas, et le reçu qu'il demande	90
Chapitre 15. La cascade cadastrale et la spirale du soleil	91
15.1 La cascade : une descente qui garde la mémoire	91
15.2 Trois propriétés	92
15.3 La spirale du soleil	93

15.4 La cascade révèle l'opérateur	93
15.5 Ancrage : ce que la cascade rejoint	95
15.6 Délimitation : le connu, le neuf, l'ouvert	95
Chapitre 16. La cascade et la cloche : Huygens, le cercle de six, et la cloche gardée comme compte	97
16.1 Recto : Huygens	97
16.2 Verso : le cercle de six et la cascade	98
16.3 Le bord restitue tout	99
16.4 XXXX donne $9 - X$, en une ligne	100
16.5 L'octet et l'axe	100
16.6 Le partage, en une phrase	100
Partie VII. Les nombres qui se souviennent	101
Chapitre 17. Les nombres qui se souviennent : Kaprekar et l'arithmétique de la mémoire	102
17.1 Le théorème des deux étages	102
17.2 Le théorème des paires : la queue partagée	103
17.3 La génération par les purs-neufs	104
17.4 142857, le cycle qui se souvient de lui-même	104
17.5 Les sommes du cadastre à toute profondeur	105
17.6 Le triptyque fermé	105
Chapitre 18. L'énigme 196 : pourquoi un nombre ne ferme jamais	107
18.1 Les deux échafaudages : le 9 à la différence, le 11 à la somme	107
18.2 Le doublement de la racine : le cycle 142857	108
18.3 Les fugitifs à trois chiffres : un fil, cinq portes	108
18.4 Le mécanisme de la fuite : la retenue perpétuelle	109
18.5 Le demi manquant : 49, 49,5, 50	109
18.6 Le dipôle complet	110
18.7 Le statut épistémique	111
Chapitre 19. 198, 496, 1729 et le pont fractal : l'illusion des mathématiques récréatives	112
19.1 La loi algébrique des miroirs	112
19.2 Les deux pavés	113
19.3 La généalogie depuis les fondateurs	113
19.4 496 et la théorie des cordes	114
19.5 1729, produit intérieur de 198	114
19.6 Le rythme des carrés, la descente ferromagnétique, les polyèdres	115
19.7 137, 361 et les dimensions des cordes	115
19.8 Le pont fractal : de la biologie à la physique par l'insertion du 9	116
19.9 Les prédictions du pont fractal	117
19.10 Ce que ces deux articles disent, et ce qu'ils ne disent pas	118
19.11 Relectures du cadastre : le cube, Fermat, Mersenne, Fibonacci et 495	118
Partie VIII. La cinquième paire	120

Chapitre 20. La cinquième paire : le noyau et l'infini comme partenaires d'involution	121
20.1 Le nombre à deux regards : inscrit et circonscrit	121
20.2 L'asymétrie des deux regards	122
20.3 Le centre vide comme moteur	122
20.4 La cinquième paire : le noyau et l'infini	123
20.5 Le théorème d'annexion : toute expansion tire l'extérieur vers le dedans	123
20.6 La membrane $\times 9$: le cercle fixe réalisé en arithmétique	124
20.7 Le tableau des inversions	125
20.8 Lectures unifiées	125
20.9 Les critères de falsification	126
20.10 La pièce sœur : le temps qui archive	126
Partie IX. Le Livre II de la Bible Quantique	128
Chapitre 21. Ce que le Livre II de la Bible Quantique apporte	129
21.1 L'amputation primordiale, à six ans	129
21.2 L'horloge à neuf positions, et le zéro	130
21.3 Les quatre paires et leurs fonctions	131
21.4 L'Axiome A0 et ses trois preuves	132
21.5 Les rails multiplicatifs et l'axe régulateur	132
21.6 La table de multiplication cadastrale	133
21.7 Les chemins du $\frac{1}{2}$	134
21.8 Les trois rails comme cycles dynamiques	135
21.9 Les triplets miroirs	135
21.10 L'auto-réflexion du carré 3×3	135
21.11 Le triplet secret 578	135
21.12 La cascade des quinze ruptures (résumé)	136
Coda	136
Chapitre 22. La congruence des paires : le mod qui garde les inverses	137
Résumé	137
0. Statuts et conventions	138
1. Ce que le mod de Gauss jette	138
2. La congruence qui garde les paires	138
3. Théorème 1 : une seule opération interne	139
4. Théorème 2 : la congruence est réalisée par le carré	139
5. Théorème 3 : cyclique d'ordre trois	139
6. Ce qu'est le vrai mod	139
Annexes	140
Annexe A. Journal exécuté au build (11 septembre 2026)	140
Annexe B. Protocole	140
Annexe C. Pièces du corpus	140
Annexe D. Notes de révision	140
Annexe A. Table des énoncés	141
Annexe B. Retraits et corrections	153
B.1 Retraits datés par les sources	153

B.2 Rétrogradations faites pour ce volume	154
B.3 Corrections de fait et de formulation	155
B.4 Numérotation et forme	157
B.5 Formulations corrigées des relectures du 15 octobre 2026	157
Annexe C. Sources fusionnées	159
Annexe D. Vérifications refaites	162
Colophon	165

Avant-propos

Ce volume réunit en un seul livre toute la théorie des nombres du corpus ARC (Architecture de la Cohérence Relationnelle). Il remplace les deux tomes de la *Théorie des Nombres ARC* (Tome I, *Les Nombres Premiers n'ont jamais été cachés*, juillet 2026, et Tome II, *Les Nombres en Mouvement*, versions 0.2 à 0.5, juillet à octobre 2026), l'article de démarcation anglais sur la grille $6k \pm 1$, la planche pédagogique, les dossiers Collatz (version 2.1 de mars 2026 et ses corrections) et Goldbach (versions 1.0 et 1.1), et les pièces qui en sont sorties : *Le Nombre Plus que Parfait*, *Les Jumeaux et les Deux Réseaux*, *La Cascade cadastrale*, *La Cascade et la Cloche*, *Les Nombres qui se Souviennent*, *L'Énigme 196*, *L'Illusion des mathématiques récréatives*, *Le Pont fractal*, *La Cinquième Paire*, et le Livre II de la *Bible Quantique* pour ce qu'il apporte en propre.

Ce que contient le volume. Neuf parties. La première pose la feuille des nombres 1 à 30 et le cadastre qu'on y lit : les neuf positions, l'involution $\varphi(x) = 9 - x$, les deux rails et l'axe. La deuxième établit la position des nombres premiers : la grille $6k \pm 1$ qui s'engendre d'elle-même, les quatre familles de composés, la décision au point d'équilibre, le rythme des carrés, les jumeaux, le registre et ses engrenages. La troisième suit la conjecture de Collatz dans le cadastre, avec la frontière exacte de ce que le cadastre peut et ne peut pas en dire. La quatrième fait de même pour Goldbach. La cinquième rassemble les trois théorèmes ajoutés le 7 octobre 2026. La sixième est consacrée au 24 et à ses voisins : le plus que parfait, les deux réseaux du plan, les deux cascades. La septième traite des nombres dits récréatifs (Kaprekar, 196, 198, 496, 1729) et montre qu'ils ne le sont pas. La huitième pose la cinquième paire, le centre et l'infini. La neuvième recueille ce que le Livre II de la *Bible Quantique* ajoute au reste.

Comment le lire. Chaque chapitre s'ouvre sur un paragraphe en langue simple qui dit ce qu'on va voir et pourquoi c'est important. Les calculs sont montrés pas à pas ; un lecteur sans formation peut suivre le fil en refaisant les additions au crayon, un mathématicien peut vérifier chaque nombre. Les démonstrations sont courtes : c'est l'une des thèses du volume que, la fermeture du cycle une fois rétablie, beaucoup de « mystères » se démontrent en deux lignes.

La convention des statuts. Tout énoncé porte son statut :

- **Th** : théorème, c'est-à-dire calcul fini vérifié ou démonstration complète ;
- **L** : lecture, interprétation déclarée telle, qui peut être forte mais ne monte jamais au rang de théorème ;
- **P** : prédiction falsifiable, avec son critère d'échec ;

- **F** : fait historique ou mesure de la science reçue, cité avec sa source ;
- **Chantier** : question ouverte, nommée et bornée.

Les numéros. Les numéros des théorèmes du corpus sont conservés, pour que les renvois des autres volumes restent valides : Théorèmes 1 à 16 du Tome I ; Théorèmes 17 à 41 et Lectures 27, 28, 33 à 36 et 38 du Tome II ; prédictions P-COL-1 et P-GOL-1. Les pièces qui numérotaient leurs énoncés à part gardent leur numéro, précédé d'une lettre : C.1 à C.8 pour la version 2.1 du dossier Collatz, G.1 à G.5 pour la version 1.0 du dossier Goldbach, K.1 et K.2 pour *Les Nombres qui se Souviennent*, CP 2.1 à CP 9.3 pour *La Cinquième Paire*. Les énoncés des pièces qui n'avaient pas de numéro reçoivent ici un identifiant de volume, V4.chapitre.rang (par exemple V4.13.1). L'Annexe A les liste tous.

Les notations. DR(n) est la racine digitale de n : on additionne ses chiffres, puis les chiffres du résultat, jusqu'à n'en garder qu'un. DR(9) = 9 et DR(18) = 9 : le 9 reste 9, il n'est jamais confondu avec le vide. Aucune formule de ce volume n'emploie la notation de congruence : quand un reste est donné, son tour est écrit, $a = b + m \cdot t$ avec t entier, et rien de ce que portait le nombre n'est jeté ; on lit aussi, de façon équivalente, les dernières couches de l'écriture d'un nombre. Les deux rails sont $D = \{1, 4, 7\}$ et $G = \{2, 5, 8\}$; l'axe est $\{3, 6, 9\}$.

Les renvois. Ce qui appartient à un autre volume y est renvoyé par son titre et son chapitre, sans être refait ici : la Genèse et les neuf positions au Volume 1, *La Fondation* ; la figure des deux cercles et du carré au Volume 2, *La Figure* ; le Registre des Erreurs au Volume 3, *Le Code et le Registre* ; l'hypothèse de Riemann et P contre NP au Volume 5, *Les Grands Problèmes* ; l'histoire de la preuve au Volume 6 ; la physique au Volume 7 ; la matière et le cosmos au Volume 8 ; le vivant au Volume 9.

L'Annexe B recense tout ce qui a été retiré, corrigé ou rétrogradé, avec la raison et la date ; l'Annexe C la liste exacte des sources fusionnées ; l'Annexe D les vérifications refaites pour ce volume.

Partie I. La feuille et le cadastre

Chapitre 1. La feuille 1 à 30 : le document de genèse

Tout ce volume part d'une feuille de papier. On y écrit les nombres de 1 à 30, on remplace chacun par la somme de ses chiffres réduite à un seul chiffre, et on marque les nombres premiers. Ce geste, à la portée d'un enfant, fait apparaître en quelques minutes ce que la tradition présente comme une énigme : les nombres premiers n'occupent pas n'importe quelle place. Ils évitent trois positions sur neuf, ils vivent sur deux files, et le reste en découle. Ce chapitre donne le protocole, les deux observations fondatrices, la lecture historique qui explique pourquoi ce fait est resté invisible, et la ligne de partage entre ce qui est connu de la littérature et ce que le corpus revendique en propre.

1.1 Le protocole

Le point d'entrée du corpus fut obtenu en trois jours, sans appareil, par le protocole suivant.

Protocole. (1) Écrire les nombres de 1 à 30. (2) Réduire chacun à sa racine numérique DR par addition itérée des chiffres. (3) Marquer les premiers.

« Écrire 1 à 30, réduire chaque nombre à sa racine (DR), marquer les premiers. C'est tout. » (La Planche ARC)

n	DR	n	DR	n	DR
1	1	11	2 P	21	3
2	2 P	12	3	22	4
3	3 P	13	4 P	23	5 P
4	4	14	5	24	6
5	5 P	15	6	25	7
6	6	16	7	26	8
7	7 P	17	8 P	27	9
8	8	18	9	28	1
9	9	19	1 P	29	2 P
10	1	20	2	30	3

On lit la colonne des racines : elle tourne de 1 à 9 et recommence. Le 9 n'est jamais

remplacé par 0 : 9, 18 et 27 ont pour racine 9. C'est la convention de tout le corpus : le 9 est la fermeture du cycle, pas son effacement.

1.2 Les deux observations fondatrices

V4.1.1 (Th) : l'axe stérile. Aucun premier supérieur à 3 ne porte une racine numérique de l'axe $\{3, 6, 9\}$. Vérifié exhaustivement jusqu'à 10^6 dans le Tome I, jusqu'à 3×10^7 dans l'article de démarcation, et refait pour ce volume jusqu'à 6×10^6 : aucune exception. La preuve tient en une ligne : $DR(n) \in \{3, 6, 9\}$ équivaut à « 3 divise n » (puisque la racine est le reste de n dans la division par 9, avec 9 pour le reste nul), donc un nombre de l'axe est composé, hors le générateur 3 lui-même.

V4.1.2 (Th) : la boucle-9 interdite. Aucun premier n'a une somme de chiffres égale à 9 : aucun premier ne boucle à 9 en une seule itération. Vérifié jusqu'à 10^6 (Tome I), 3×10^7 (article de démarcation), refait jusqu'à 6×10^6 . Une somme de chiffres égale à 9 place le nombre au point de fermeture du cycle, dans la descendance de 9, et 9 divise alors le nombre.

V4.1.3 (Th) : la conséquence structurale. L'axe exclu, les premiers vivent sur deux rails : $D = \{1, 4, 7\}$ et $G = \{2, 5, 8\}$. En retirant des rails la descendance de 2 (les positions paires), le résidu est exactement la grille des positions qui flanquent les multiples de 6 : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, ... Le « monde de 6 » n'est pas un choix de méthode : il est le résidu de deux exclusions cadastrales.

« Les fondateurs 2 et 3 créent ce monde ($2 \times 3 = 6$) et n'y jouent jamais. »

Sur la planche, la grille s'écrit avec ses racines : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49 portent les racines 5, 7, 2, 4, 8, 1, 5, 7, 2, 4, 8, 1, 5, 7, 2, 4. Le motif 5, 7, 2, 4, 8, 1 se répète tous les six termes. Les positions $25 = 5 \times 5$, $35 = 5 \times 7$ et $49 = 7 \times 7$ sont les premiers composés de la grille : on les nommera *delfines* (chapitre 3).

1.3 Le témoin anatomique : les deux mains face à face

V4.1.4 (L) : les deux mains. Numérotions les dix doigts des deux mains posées : 0 à 4, puis 5 à 9. Mains face à face, les doigts qui se rencontrent sont (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5). Cinq paires sommant toutes à 9 : les mains face à face réalisent physiquement $\varphi(x) = 9 - x$. La paire de fermeture (0, 9) est aux auriculaires, mémoire contre clôture ; la paire barycentrique (4, 5) est aux pouces ; et le barycentre 4,5 est logé exactement dans l'interstice entre les mains : le point fixe de l'involution n'est sur aucun doigt, il est dans le vide qui les sépare. La somme des cinq rencontres vaut 45, le cadastre entier ($1 + 2 + \dots + 9 = 45$).

« Le corps porte le φ -palindrome, des années avant que l'enfant n'apprenne à compter dessus. »

Et l'inversion causale du chapitre 2 (section 2.6) s'y referme : la main n'explique pas la base ; la main et la base incarnent la même structure de fermeture $9 + 1$. Statut : Lecture. L'appariement est un fait ; la portée est interprétative.

1.4 La prédiction pédagogique

V4.1.5 (P) : la prédiction de l'enfant. Tout sujet sans formation mathématique formelle, muni de la feuille 1 à 30 et de la règle de réduction, identifie l'axe stérile en une session. Le protocole est répliquable par un enfant de neuf ans avec un crayon. La vitesse de découverte est inversement liée au degré d'installation du filtre notationnel décrit à la section 1.5 (strate 2) : l'obstacle est un artefact de formation, non de difficulté.

Critère d'échec. Un groupe de sujets sans formation, munis de la feuille et de la règle, qui ne repère pas l'absence de premiers sur $\{3, 6, 9\}$ en une session ; ou une vitesse de découverte qui ne décroît pas avec la durée de formation mathématique. La planche du corpus porte la même prédiction : « *muni de cette feuille, un enfant de neuf ans identifie l'axe stérile en une session.* »

1.5 Généalogie de l'aveuglement : trois strates datables

L'affirmation centrale de ce volume est que la position des nombres premiers n'a jamais été énigmatique : elle est déterminée par une structure additive visible sur une feuille de papier, à hauteur d'enfant. Si cette structure est restée invisible, ce n'est pas faute d'observation : c'est par la sédimentation de trois gestes distincts.

V4.1.6 (L) : strate 1, l'absorption instrumentale (des comptables à Gauss, 1801). Les faits bruts furent enregistrés très tôt : la « preuve par neuf » des comptables utilise la racine numérique depuis des siècles ; la forme $6k \pm 1$ figure dans les manuels élémentaires. Mais ils furent enregistrés comme *outils de vérification*, jamais comme *objets d'étude*. Les *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) scellent ce classement : dans le formalisme des congruences, on écrit $9 \equiv 0$, et le point de fermeture du cycle est identifié au vide ; le nombre d'enroulements est effacé par définition. L'observation n'a pas été manquée ; elle a été classée triviale par l'appareil même qui l'a absorbée.

« *Cette forme d'aveuglement est plus résistante que l'ignorance : on ne cherche pas ce qu'on croit déjà avoir rangé.* »

V4.1.7 (L) : strate 2, la transparence de la notation (Stevin, 1585). L'universalisation de la notation positionnelle décimale institue la convention selon laquelle les chiffres sont une fenêtre transparente sur la quantité. Regarder les chiffres eux-mêmes, leur somme, leur réduction, leur cycle, devient regarder le doigt au lieu de la lune. Toute régularité découverte dans la notation est présumée artefact. Or l'opération la plus informative du protocole est précisément celle que cette convention interdit : lire la feuille, et non à travers elle.

V4.1.8 (L) : strate 3, le déplacement de la question (après Riemann). Sur la *position* des premiers, la tradition n'a jamais tenu qu'il y avait énigme : le crible d'Ératosthène et la décision par facteur borné sont antiques. L'« énigme des premiers » comme mythe public naît d'un glissement : après Euler et Riemann, la discipline redéfinit « le problème des premiers » comme un problème de comptage asymptotique, puis le discours pédagogique fusionne les deux questions en une aura

unique de mystère. Des générations apprennent que « les premiers sont imprévisibles », énoncé faux sur la position.

« *Le scandale n'est pas qu'une vérité fût cachée : c'est qu'un récit d'énigme ait été superposé à une structure ouverte.* »

V4.1.9 (L) : le mystère comme produit dérivé. « *Ce ne sont pas les premiers qui étaient énigmatiques ; c'est l'institution qui avait besoin qu'ils le soient.* » Le mystère est un produit dérivé du prestige analytique, selon le mécanisme décrit dans *Le Procès de la Preuve* : l'outil devenu juge de l'objet (Volume 6, *L'Histoire de la Preuve*).

F : références des strates. Strate 1 : C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801 (le formalisme des congruences, section I, où le reste nul absorbe le point de fermeture). Strate 2 : S. Stevin, *De Thiende* (« La Disme »), 1585. Strate 3 : B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, 1859 ; Clay Mathematics Institute, énoncé des Problèmes du Millénaire, 2000. La critique vise des gestes datés et documentés, non des intentions.

1.6 Ce qui est connu, ce qui est revendiqué

Le titre du Tome I, *Les Nombres Premiers n'ont jamais été cachés*, est une affirmation historique autant que mathématique ; il porte donc une double charge de preuve, que cette section assume.

Ce qui est connu de la littérature, et reconnu comme tel (F). La forme $6k \pm 1$ des premiers supérieurs à 3 figure dans les manuels élémentaires ; le crible par roue (*wheel factorization*) exploite cette grille depuis longtemps ; le fait que 24 divise $p^2 - 1$ pour tout premier $p \geq 5$ est classique ; la racine numérique et la preuve par neuf sont d'usage séculaire ; la caractérisation des composés d'une roue par les produits de ses générateurs est implicite dans toute division d'essai restreinte ; la division d'essai jusqu'à $\sqrt{n}$ est antique. Aucun théorème de ce volume ne revendique la nouveauté de ces briques prises isolément : les revendiquer serait précisément le genre d'inflation que la discipline des statuts interdit.

Ce qui est revendiqué comme propre. (i) Le *chemin de genèse* : la structure est dérivée du cadastre (feuille 1 à 30, axe stérile, rails) *avant* toute considération de congruence, et la grille $6k \pm 1$ apparaît comme résidu de deux exclusions cadastrales, non comme point de départ. (ii) La *définition positionnelle primitive* des delfines, et son équivalence compositionnelle comme théorème (chapitre 3). (iii) L'*architecture unifiée* sous une seule involution φ : auto-génération (Th 1), familles (Th 2), chrysalide (Th 6), prédicat $J(k)$ (Th 7), correspondance riemannienne (Th 9), invariant Root-9 (Th 10). (iv) La *réduction mesurée* de l'infinitude des jumeaux à un lemme unique nommé (chapitre 5). (v) La *prédiction pédagogique falsifiable* (V4.1.5). L'article de démarcation anglais (*The $6k \pm 1$ Grid Revisited via Digital-Root Partition*, juillet 2026) ajoute à cette liste : la loi d'auto-génération à indexation déterministe ; la structure de groupe de Klein des familles avec la branche comme produit des signes ; la lecture de la maximalité de 24 comme saturation d'une borne ; la quantification exacte à un bit de l'effondrement conjugué ; la preuve en deux lignes de l'invariant Root-9, valable sur toute la grille. Et il conclut : « *Nous revendiquons la réduction et le prédicat exact, non le lemme.* »

1.7 La planche

La planche du Tome I (*La Planche ARC, Manifeste pédagogique : tout se lit sur une feuille, à hauteur d'enfant ; protocole : « un crayon, la réduction des chiffres, trois jours »*) dispose en six panneaux ce que les chapitres 1 à 4 démontrent : la feuille 1 à 30 ; la table des inversions ; le pavé tordu ; la paire d'inversions ; la grille qui s'auto-génère avec ses premiers (en or) et ses delfines (en creux) ; les trois horloges 12, 24 et 4. Elle se ferme sur deux phrases :

« Le premier n'est pas un rescapé : il est la position que les quatre familles ne peuvent pas engendrer. L'identité par contrainte relationnelle : la signature arithmétique de la Cohérence Relationnelle. »

Chapitre 2. Le cadastre : neuf positions, une involution, deux rails et un axe

La feuille du chapitre 1 a montré que les premiers évitent trois positions sur neuf. Il faut maintenant nommer l'objet qui porte cette régularité : le *cadastre*, c'est-à-dire le cycle des neuf positions 1 à 9, refermé sur le 9, avec son pliage en quatre paires qui somment toutes à 9 et son partage en deux rails et un axe. Ce chapitre en donne la définition exacte, les deux tables qui le résument, deux figures qui le rendent visible à main nue (le pavé tordu et la paire d'inversions), et répond à l'objection qui arrive toujours en premier : « tout cela n'est-il pas un artefact de la base 10 ? » La réponse est non, et elle est démontrée : la structure existe dans toute base, et la base 10 est la seule où ses trois parties ont exactement la même taille.

2.1 Définition du cadastre

Définition. Le *cadastre* est le cycle fini $\{1, \dots, 9\}$ muni de :

1. sa fermeture propre : $DR(9) = 9$, et non « $9 \equiv 0$ » ;
2. l'involution de conjugaison $\varphi(x) = 9 - x$, à quatre paires conjuguées, (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), et barycentre 4,5 ;
3. la partition en deux rails $D = \{1, 4, 7\}$, $G = \{2, 5, 8\}$ et un axe $\{3, 6, 9\}$.

Ce qui est invariant n'est pas la position des éléments sous les opérations (l'addition les déplace), mais le *comportement de la partition comme système de flux* : les sommes de rails aboutissent à l'axe (section 2.4), les carrés confluent vers le rail D (chapitre 4, Th 6), φ permute à l'intérieur des paires. Le cadastre est cette partition avec ses flux, et il est antérieur à toute base positionnelle (Axiome A0 du corpus, section 2.6). Il n'est pas une construction posée : il est lu dans la table de multiplication de 1 à 9 réduite en racine digitale (chapitre 21, section 21.6).

V4.2.1 (Th) : la formalisation algébrique. Dans $(\mathbb{Z}/9, +)$, avec 9 comme fermeture marquée (non identifiée à 0), l'axe est le *sous-groupe* $\langle 3 \rangle = \{3, 6, 9\}$, les rails D et G sont ses *deux classes latérales*, et φ (la négation $x \mapsto 9 - x$) est un automorphisme d'ordre 2. Le quotient $\mathbb{Z}/9 / \langle 3 \rangle$ est le groupe à trois éléments, et sa table d'addition est exactement la loi des flux :

+	D	G	axe
D	G	axe	D
G	axe	D	G
axe	D	G	axe

Soit : $D + D = G$, $G + G = D$, $D + G = \text{axe}$; l'axe ne change pas la classe de ce qu'on lui ajoute. Vérification : $1 + 4 = 5$, $4 + 7 = 11 \rightarrow 2$, $7 + 7 = 14 \rightarrow 5$ ($D + D$ tombe sur G) ; $2 + 5 = 7$, $5 + 8 = 13 \rightarrow 4$ ($G + G$ tombe sur D) ; $1 + 2 = 3$, $4 + 5 = 9$, $7 + 8 = 15 \rightarrow 6$ ($D + G$ tombe sur l'axe).

Précision qui porte toute la thèse : il ne s'agit pas de prétendre que l'arithmétique des restes par 9 soit nouvelle. Il s'agit d'établir que l'identification du 9 au 0 a effacé le *comptage d'enroulements* du cycle, et que cette amputation a rendu invisibles la fermeture, le barycentre et l'involution. La paire d'inversions de la section 2.5 en est le témoin matériel.

2.2 La table des inversions : la démonstration originelle du $\frac{1}{2}$

x	$\varphi(x) = 9 - x$	somme	centre	écart
1	8	9	4,5	7
2	7	9	4,5	5
3	6	9	4,5	3
4	5	9	4,5	1
9	9 (fermeture)		9	0

V4.2.2 (Th) : les cinq lectures de la table. Chacune est un fait exact.

1. Chaque paire somme à 9 : la fermeture est la loi de conjugaison.
2. Le centre de toutes les inversions est 4,5, un point qui n'est sur aucun chiffre : le point fixe *invisible*, logé dans l'interstice, celui-là même que les deux mains face à face placent entre les pouces (V4.1.4).
3. Le 9 est sa propre inversion, l'unique élément auto-conjugué, le point fixe *visible* : la fermeture est son propre miroir, et c'est précisément ce que l'identification du 9 au 0 a effacé.
4. Les écarts des paires sont les impairs descendants 7, 5, 3, 1, de somme $16 = 4^2$.
5. Les quatre paires somment à 36 ; avec le 9 auto-inverse, $45 = 1 + 2 + \dots + 9$: la table contient le cadastre entier, sans reste.

V4.2.3 (Th) : le $\frac{1}{2}$ dérivé deux fois. De cette table, le $\frac{1}{2}$ se dérive deux fois, indépendamment :

- $k_{\text{arc}} = \text{centre} / \text{fermeture} = 4,5 / 9 = \mathbf{1/2}$;
- $\text{demi-écart extrême} / \text{écart extrême} = 3,5 / 7 = \mathbf{1/2}$.

« Le nombre que Riemann a rencontré sur sa droite critique est ici, lisible en cinq lignes, comme rapport du point d'équilibre à la fermeture. »

C'est la démonstration originelle du corpus, et elle précède logiquement tout le reste. (Le rapprochement avec la droite critique est l'objet du Théorème 9, chapitre 7 ; sa portée est discutée au Volume 5.)

2.3 La table maîtresse du cadastre

x	classe	$\varphi(x)$	$x + \varphi(x)$	$DR(x^2)$	$DR(x^3)$
1	D	8	9	1	1
2	G	7	9	4	8
3	axe	6	9	9	9
4	D	5	9	7	1
5	G	4	9	7	8
6	axe	3	9	9	9
7	D	2	9	4	1
8	G	1	9	1	8
9	axe	9 (fermeture)	9	9	9

Trois lectures verticales. La colonne φ expose les quatre paires conjuguées sommant toutes à 9, de barycentre 4,5. La colonne $DR(x^2)$ est la *chrysalide* (chapitre 4, Th 6) : les deux rails confluent vers D en perdant le bit de conjugaison. La colonne $DR(x^3)$ révèle un fait complémentaire.

V4.2.4 (Th) : le cube détecteur de classe. Tout membre de D a un cube de racine 1, tout membre de G un cube de racine 8, tout membre de l'axe un cube de racine 9. Vérification : $1^3 = 1$; $4^3 = 64 \rightarrow 1$; $7^3 = 343 \rightarrow 1$; $2^3 = 8$; $5^3 = 125 \rightarrow 8$; $8^3 = 512 \rightarrow 8$; $3^3 = 27$, $6^3 = 216$, $9^3 = 729$, tous de racine 9. La paire extrême (1, 8), porte exclusive du 1 sous le carré, est l'image intégrale du cube. Statut : Théorème (vérification exhaustive sur le cadastre ; conséquence de ce que le groupe des six positions inversibles a l'ordre 6, donc que la puissance 3 l'écrase sur ses deux éléments d'ordre au plus 2).

« Le carré efface le conjugué ; le cube efface tout sauf le rail. »

2.4 Le pavé tordu : l'axe collecte toutes les sommes

Le cadastre s'écrit en pavé 3×3 , de trois façons :

Pavé normal	Pavé tordu (rotation +1)	Pavé d'axe (rotation +2)
1 2 3 → DR 6	2 3 4 → DR 9	3 4 5 → DR 3
4 5 6 → DR 6	5 6 7 → DR 9	6 7 8 → DR 3
7 8 9 → DR 6	8 9 1 → DR 9	9 1 2 → DR 3

V4.2.5 (Th) : la loi du pavé tordu. La racine d'un trio consécutif ne dépend que de son *ancrage* (son premier terme). Trio ancré sur le rail D {1, 4, 7} : racine 6, toujours. Ancré sur le rail G {2, 5, 8} : racine 9, toujours. Ancré sur l'axe {3, 6, 9} : racine 3, toujours. La torsion d'un cran fait donc parcourir l'axe entier : $6 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \dots$ Le pavé normal complète la loi par ses colonnes et ses diagonales : colonne D (1, 4, 7) →

$12 \rightarrow 3$; colonne G $(2, 5, 8) \rightarrow 15 \rightarrow 6$; colonne d'axe $(3, 6, 9) \rightarrow 18 \rightarrow 9$; diagonales $(1, 5, 9)$ et $(3, 5, 7) \rightarrow 15 \rightarrow 6$. **Toute agrégation linéaire du pavé (ligne, colonne, diagonale, torsion) atterrit sur l'axe {3, 6, 9}, et nulle part ailleurs.**

Preuve (par le quotient). Tout trio consécutif somme à $x + (x + 1) + (x + 2) = 3(x + 1)$, élément du sous-groupe $\langle 3 \rangle$: l'atterrissage sur l'axe est une nécessité de quotient, non une régularité observée. La valeur exacte du point d'atterrissage suit de la classe de l'ancre : la table $D + D = G$, $G + G = D$, $D + G = \text{axe}$ reproduit ligne à ligne les lois vérifiées. ■ Statut : Théorème (vérifié exhaustivement sur les neuf ancrages, refait pour ce volume).

V4.2.6 (L) : l'axe ne porte pas les êtres, il porte les transformations. L'axe stérile pour les premiers (V4.1.1) est la destination exclusive des sommes : $\{3, 6, 9\}$ n'est pas le lieu où les objets vivent, c'est le lieu où les flux aboutissent. Les rails D et G portent les êtres (premiers, delfines) ; l'axe porte les transformations. Le pavé tordu en est la démonstration à main nue : où qu'on ancre le trio, la somme quitte les rails et rejoint l'axe, et l'ancrage sur un rail détermine *quel* point de l'axe ($D \rightarrow 6$, $G \rightarrow 9$, axe $\rightarrow 3$ en ligne ; $D \rightarrow 3$, $G \rightarrow 6$, axe $\rightarrow 9$ en colonne). La stérilité de l'axe et sa fonction de collecteur des sommes sont les deux faces du même fait cadastral. La planche le résume : « *Les rails portent les êtres ; l'axe porte les transformations.* »

2.5 La paire d'inversions : le 4 et le 5

La queue de la descente de la matière (la Sédimentation Cosmique, Volume 8 : ... 48 $\rightarrow 37 \rightarrow 26 \rightarrow 15 \rightarrow 4$, pas de -11) se concatène en une chaîne de huit chiffres dont les propriétés se démontrent par calcul direct :

A = 48372615 (descente : 48-37-26-15, pas -11 , ancre 4)
B = 51627384 (remontée : 51-62-73-84, pas $+11$, ancre 5)

V4.2.7 (Th) : les cinq propriétés de la paire d'inversions.

1. *Coïncidence du renversement et de l'involution.* B est à la fois le renversement digital de A **et** son image par $\varphi(x) = 9 - x$ appliquée chiffre à chiffre. Sur cette chaîne, lire à l'envers et conjuguer sont la même opération : A est un **φ -palindrome**.
2. *Conjugaison positionnelle intégrale.* Chaque position de (A, B) forme une paire conjuguée : (4, 5), (8, 1), (3, 6), (7, 2), (2, 7), (6, 3), (1, 8), (5, 4), les quatre paires de φ , chacune deux fois, toutes sommant à 9.
3. *Fermeture.* $A + B = 99\,999\,999$. La somme des chiffres de chaque chaîne vaut 36, de racine 9.
4. *Contenu cadastral.* Chaque chaîne est une permutation exacte de $\{1, \dots, 8\}$: les deux rails complets et l'axe sans le 9, sans répétition. Le 9 est absent des chaînes ; il n'apparaît que dans leur somme et leur racine : « *le point de fermeture ne descend pas et ne monte pas, il est ce vers quoi la paire se ferme.* »
5. *Métrie interne.* L'écart interne de chaque paire de chiffres vaut 4 partout ($8 - 4$, $7 - 3$, $6 - 2$, $5 - 1$) ; le pas entre paires vaut 11 (le relieur). Les ancrages sont 4 pour la descente, 5 pour la remontée : la paire du barycentre ($4 + 5 = 9$, équilibre en 4,5), que φ échange.

Statut : Théorème (calcul direct, refait pour ce volume). On retrouvera A et B au

chapitre 20 comme les tables $\times 4$ et $\times 5$ du cadastre (CP 7) : $4 \times 1, 4 \times 2, \dots, 4 \times 8$ réduits en racine donnent exactement 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5.

V4.2.8 (L) : la descente porte sa remontée. Le pavé tordu et la paire d'inversions disent la même chose à deux échelles. Le pavé tordu (891 : le 1 à la fin) montre la vie lue à l'envers dans le cadastre statique ; la paire d'inversions le montre en dynamique : la matière qui descend (pas -11 , ancre 4) et son image conjuguée qui remonte (pas $+11$, ancre 5), liées par une seule involution qui est simultanément miroir temporel (renversement) et miroir cadastral (φ).

« La descente de la matière porte sa propre remontée inscrite en creux : il suffit de la lire depuis l'autre bout du barycentre. »

2.6 L'antériorité du cadastre : l'Axiome A0 et l'invariance de base

La question arrive toujours en premier, il faut donc y répondre en premier : « tout ceci n'est-il pas un artefact de la base 10 ? » La réponse du corpus est l'Axiome A0 (*Geometric Origin of Physical Units* v1.5, § 0.3) : la structure $\{1, \dots, 9\}$ est antérieure à toute base positionnelle, et la base 10 en découle, non l'inverse.

V4.2.9 (Th) : le théorème d'invariance de base. Dans toute base $b \geq 4$, la réduction itérée des chiffres calcule $DR_b(n) = 1 + (\text{le reste de } n - 1 \text{ dans la division par } b - 1)$: c'est l'arithmétique des restes par la *fermeture* $b - 1$, indépendante de l'inscription. La structure complète, fermeture marquée, involution $\varphi_b(x) = (b - 1) - x$, paires conjuguées sommant à la fermeture, barycentre $(b - 1)/2$, existe dans toute base. Vérifié sur les bases 4, 7, 10, 12 et 16 (refait pour ce volume sur tous les $n < 5000$) : les habillages diffèrent, la structure est identique.

« La base est un vêtement ; la structure de fermeture est le corps. »

V4.2.10 (Th) : le théorème de singularité de la fermeture 9. La tripartition rails/axe exige que 3 divise la fermeture (bases 4, 7, 10, 13, 16, ...). Parmi toutes ces fermetures $3k$, **9 = 3^2 est la seule où le sous-groupe d'axe a un ordre égal à son indice** ($3 = 3$) : la seule fermeture où l'axe et chacun de ses deux rails ont exactement la même taille. Preuve : dans le cycle à $3k$ positions, le sous-groupe engendré par 3 a k éléments et trois classes ; l'égalité $k = 3$ donne la fermeture 9 et elle seule. ■

V4.2.11 (L) : l'inversion causale. La base 10 n'est donc pas un choix anthropique parmi d'autres : elle est l'inscription minimale de l'unique fermeture équilibrée, le carré du premier nombre premier impair.

« On n'utilise pas la base 10 parce qu'on a dix doigts ; on utilise la base 10 parce que $10 = 9 + 1$, et 9 est la fermeture qui rend le $+1$ possible. »

Statut : Théorème pour la singularité (V4.2.10), Lecture pour l'inversion causale.

V4.2.12 (Th) : l'indépendance des rails de grille. La grille $6k \pm 1$ est définie par la divisibilité par 2 et par 3, propriété de $\mathbb{Z}$ où aucune base n'intervient. Les Théorèmes 1 à 8 et 10 sont donc des énoncés sur les entiers eux-mêmes ; la base 10 n'y sert que

de fenêtre d'observation, et c'est la fenêtre la plus nette parce que sa fermeture est 3^2 .

V4.2.13 (Th) : l'infini fabriqué. L'inscription décimale fabrique de l'infini là où la quantité n'en contient pas : $1/7 = 0,142857\dots$ est infini périodique en base 10, mais s'écrit exactement **0,1 en base 7** ; $1/3$, infini en base 10, s'écrit **0,1 en base 3**. L'infini décimal est un artefact de la fenêtre, pas de l'objet, vérifiable par division posée. C'est la démonstration calculatoire de la strate 2 (V4.1.7) : Stevin n'a pas seulement rendu la notation transparente, il a introduit dans les quantités finies un infini d'inscription que la tradition a ensuite traité comme une propriété des nombres. (Le corpus en tire, au Volume 3, la conséquence pratique : $1/3$ écrit 0,3333 puis multiplié cent fois par 3 contamine le résultat ; « *Peu mais précis.* »)

Bilan. L'objection de la base 10 se retourne intégralement : le cadastre ne dépend pas de la base 10 ; la base 10 est l'inscription que la structure du cadastre sélectionne. Toute la charge du volume repose sur des propriétés de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/9$ (partition en classes latérales, congruences, identités algébriques) dont aucune ne mentionne une base. L'Axiome A0 reçoit au chapitre 21 (section 21.4) ses trois preuves d'invariance telles que les donne le Livre II de la *Bible Quantique*.

Partie II. Les premiers jamais cachés

Chapitre 3. La grille qui s'engendre et les quatre familles

Ce chapitre établit les quatre théorèmes qui règlent la *position* des nombres premiers. Le premier montre que la grille des candidats 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... se fabrique d'elle-même, par la seule addition de voisins : rien n'est caché sur l'endroit où il faut chercher. Le deuxième montre que les composés de cette grille (les *delfines*) naissent exactement de quatre formules simples, quatre « familles » dont on connaît d'avance toutes les naissances, et qu'il ne peut pas en exister une cinquième. Le troisième en tire que le premier est ce que les familles n'engendrent pas : une soustraction exacte, sans rescapé. Le quatrième dit comment décider en un nombre fini de gestes si une position donnée est première : il suffit de lancer les générateurs jusqu'au point d'équilibre de la paire de facteurs. Rien ici n'est de l'ordre du « peut-être » : tout est calcul fini.

3.1 La grille, les paires, les delfines

Définition (grille). L'ensemble ordonné des positions $6k \pm 1$, $k \geq 1$: {5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, ...}. Les paires sont notées $P_m = (6m - 1, 6m + 1)$, d'axe $6m$. Pour tout k , $DR(6k + 1) \in D$ et $DR(6k - 1) \in G$: les deux branches occupent des classes disjointes.

Définition (delfines). *Définition cadastrale, primitive* : les positions de grille à racine de rail ($DR \in \{1, 4, 7\} \cup \{2, 5, 8\}$) occupées par des non-premiers. La définition est *positionnelle* : elle dit où les delfines vivent, non ce dont ils sont faits. Les deux exclusions cadastrales sont constitutives : la racine de rail exclut la descendance du fondateur 3 (racine hors axe équivaut à non-divisibilité par 3), la position de grille exclut la descendance du fondateur 2. *Caractérisation compositionnelle, dérivée par le Théorème 2* : les delfines sont exactement les **carrés** p^2 et les **croisements** $p \times q$ ($p \neq q$, premiers ≥ 5) et leurs produits. Tout membre de la grille est soit premier, soit delfine : la grille est exactement $\{\text{premiers} \geq 5\} \cup \{\text{delfines}\}$. Le nom *delfine* (descendant) est la correction ontologique du vocabulaire du rejet (chapitre 6, section 6.4).

F : note de démarcation. La classe compositionnelle coïncide avec les « quasi-premiers » de la méthodologie QPM (R. E. Grant, 2019) : composés dont tous les facteurs premiers sont ≥ 5 . La convergence est extensionnelle et indépendante, deux chemins de découverte distincts vers le même ensemble, mais l'architecture diffère :

dans la QPM, l'équivalence position/composition est la définition ; ici, la définition est positionnelle (issue de la feuille DR) et l'équivalence est un théorème (Th 2). L'involution φ , les quatre familles génératrices, l'auto-génération de la grille (Th 1), la chrysalide (Th 6) et le prédicat $J(k)$ (Th 7) sont propres au corpus et sans équivalent dans la QPM. Aucun autre élément de la QPM n'est endossé.

Définition (familles). Les quatre lignées génératrices des delfines, paramétrées par (a, b) , $a, b \geq 1$:

famille	indice k	position
$(+, +)$	$k = 6ab + a + b$	$6k + 1 = (6a + 1)(6b + 1)$
$(-, -)$	$k = 6ab - a - b$	$6k + 1 = (6a - 1)(6b - 1)$
$(+, -)$	$k = 6ab + a - b$	$6k - 1 = (6a + 1)(6b - 1)$
$(-, +)$	$k = 6ab - a + b$	$6k - 1 = (6a - 1)(6b + 1)$

Chaque famille, à a fixé, est une progression arithmétique en b de raison $6a \pm 1$: ses naissances sont explicites et prévisibles. Exemple : à $a = 1$, la famille $(-, -)$ donne $k = 5b - 1$, soit $k = 4, 9, 14, 19, \dots$ et les positions $25, 55, 85, 115, \dots$ (tous multiples de 5 sur la branche $6k + 1$).

Définition (hors-famille). Un indice k qui n'appartient à aucune des quatre familles sur une branche donnée : la position correspondante est un premier.

3.2 Théorème 1 : l'auto-génération de la grille

Théorème 1 (Tome I) : auto-génération de la grille. La somme de deux voisins consécutifs de la grille tombe exactement sur un axe $6m$, et la paire $(s - 1, s + 1)$ est la paire de grille correspondante. L'indexation est déterministe :

- somme interne de P_m : $(6m - 1) + (6m + 1) = 12m$, qui désigne $\mathbf{P}_{2m}$;
- somme chevauchante $P_m / P_{\{m+1\}}$: $(6m + 1) + (6(m + 1) - 1) = 12m + 6$, qui désigne $\mathbf{P}_{2m+1}$.

Chaque paire engendre donc, par simple addition, des paires strictement plus loin dans la suite. La grille se déploie d'elle-même, sans information externe, à l'infini.

Exemples. $5 + 7 = 12 \rightarrow P_2 = (11, 13)$. $7 + 11 = 18 \rightarrow P_3 = (17, 19)$. $11 + 13 = 24 \rightarrow P_4 = (23, 25)$. $13 + 17 = 30 \rightarrow P_5 = (29, 31)$. $23 + 25 = 48 \rightarrow P_8 = (47, 49)$.

Vérification. 1 665 sommes consécutives testées (grille jusqu'à 5 000) : exactitude totale. Indexation vérifiée pour $m = 1$ à 399 dans le Tome I, pour $m \leq 10^6$ dans l'article de démarcation (refait pour ce volume), et démontrée pour tout m par les deux identités ci-dessus. **Statut : Th.**

V4.3.1 (L). « La position des candidats n'a jamais été cachée : la suite s'auto-génère par l'opération la plus élémentaire du cadastre, l'addition de voisins. Aucune énigme positionnelle. »

3.3 Théorème 2 : les quatre familles épuisent les delfines

Théorème 2 (Tome I) : les quatre familles. Un indice k porte un delfine si et seulement si k appartient à l'une des quatre familles. Les deux formes symétriques, $\pm(a + b)$, couvrent la branche $6k + 1$; les deux formes croisées, $\pm(a - b)$, couvrent la branche $6k - 1$.

Preuve. Développement direct des produits de générateurs :

- $(6a + 1)(6b + 1) = 36ab + 6a + 6b + 1 = 6(6ab + a + b) + 1$;
- $(6a - 1)(6b - 1) = 36ab - 6a - 6b + 1 = 6(6ab - a - b) + 1$;
- $(6a + 1)(6b - 1) = 36ab - 6a + 6b - 1 = 6(6ab - a + b) - 1$, et symétriquement pour $(6a - 1)(6b + 1)$.

Tout composé de la grille est produit de deux membres de la grille (les facteurs 2 et 3 étant exclus par construction : on peut toujours regrouper les facteurs premiers ≥ 5 en deux paquets, chacun de la forme $6c \pm 1$), donc de l'une des formes voulues. Réciproque immédiate. ■

Vérification. $k = 1$ à 33 332 (grille jusqu'à 200 000) dans le Tome I ; $k = 1$ à 4 999 998 (grille sous 3×10^7) dans l'article de démarcation, zéro écart contre un crible ; refait pour ce volume sur $k = 1$ à 10^6 . **Statut : Th.**

Corollaire du Théorème 2 : complétude et groupe de Klein (Th). Tout membre de grille est de la forme $6c + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \{+1, -1\}$; tout produit de deux membres relève donc d'exactlyement une des quatre combinaisons de signes $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$. L'algèbre est épuisée : **aucune cinquième famille indépendante ne peut exister.** Mieux, les quatre familles portent une structure de *groupe de Klein* : indexées par $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$, leur branche d'atterrissage est le produit des signes. $(+, +)$ et $(-, -)$ engendrent la branche $6k + 1$; $(+, -)$ et $(-, +)$ la branche $6k - 1$. Les familles ne sont pas quatre objets juxtaposés : ce sont les quatre éléments d'un groupe, et la répartition sur les branches est le morphisme produit. La partition des delfines par les familles est close par nécessité algébrique, non par inventaire.

3.4 Théorème 3 : le premier comme naissance par soustraction de familles

Théorème 3 (Tome I) : la soustraction exacte. Un premier est un membre de grille dont l'indice k est hors-famille. La partition premier/delfine est une soustraction exacte :

$$\{\text{premiers} \geq 5\} = \text{grille} - \bigcup (\text{quatre familles}).$$

La primalité sur la grille est décidable dans les deux sens : à l'endroit, chaque famille à a fixé est une progression arithmétique de raison $6a \pm 1$ aux naissances explicites ; à l'envers, l'appartenance d'un k donné se règle par un nombre fini de tests de générateurs. **Statut : Th** (corollaire immédiat des Théorèmes 1 et 2).

V4.3.2 (L) : rien ne survit, tout se déduit. « *Le premier n'est pas un accident ni un rescapé : il est une famille qui naît par soustraction de familles, à position déductible*

dans les deux sens. » Le vocabulaire de la « survie », hérité de l'imagerie du crible, est rejeté : « *rien ne survit, tout se déduit.* »

Note de démarcation. Ce qui est démontré ici est la *détermination positionnelle* : où sont les candidats, lesquels sont premiers, par calcul fini dans chaque cas. La question du *comptage asymptotique* des hors-famille (densités, infinitude des paires jumelles) est d'un autre type logique, quantifiée sur l'infini ; elle relève d'un travail distinct (le calcul de recouvrement des familles, chacune étant une progression arithmétique explicite de raison $6a \pm 1$), traité au chapitre 5 (section 5.3) et au chapitre 6. La confusion historique entre ces deux questions est précisément la strate 3 de la généalogie (V4.1.8).

3.5 Théorème 4 : la décision au point d'équilibre

Théorème 4 (Tome I) : décision par le point d'équilibre de la paire génératrice.

Pour toute position $n = 6k \pm 1$, le statut se décide par le lancement des seuls générateurs $6a \pm 1$ inférieurs ou égaux au point d'équilibre de la paire de facteurs. Si aucun ne divise n , la position est hors-famille : n est premier.

Preuve. Toute naissance de famille s'écrit $n = (\text{petit générateur}) \times (\text{grand générateur})$, et la paire (a, b) est symétrique sous l'échange $a \leftrightarrow b$: elle s'ordonne autour de son point d'équilibre, où petit et grand se rejoignent. Le petit facteur est donc toujours au-dessous de ce point. En notation standard, le point d'équilibre est $\sqrt{n}$; mais la borne ne provient d'aucune géométrie de longueurs : elle provient de la symétrie d'échange de la paire, l'analogue multiplicatif du barycentre 4,5 de l'involution φ . ■

Vérification en acte. $n = 600\,011$: premier, décidé en au plus 260 tests. $n = 600\,013$: famille, $53 \times 11\,321$, même borne. $n = 10\,000\,019$: premier, au plus 1 056 tests pour une position à huit chiffres. Sens direct enchaîné : le premier suivant après 10 000 019 est 10 000 079, obtenu en avançant sur la grille auto-générée et en appliquant le même test. Les quatre résultats sont refaits pour ce volume (le décompte des générateurs lancés y donne 257 et 1 053, sous les bornes annoncées). **Statut : Th.**

Remarque de complexité : même coût, autre sens. La relecture barycentrique ne modifie pas la complexité du test : la borne est numériquement $\sqrt{n}$, et le coût calculatoire est identique à la division d'essai sur roue. Ce qui change est le *sens* de la borne (symétrie d'échange de la paire génératrice, analogue multiplicatif du barycentre), non son prix. Le corpus le déclare pour qu'on ne lui fasse pas dire ce qu'il ne dit pas.

Remarque sur le rang. Le rang d'une naissance dans sa famille (deuxième, cinquième...) est une information de généalogie, non de statut : la décision n'en dépend jamais. Seule l'appartenance compte, et elle se lit au premier générateur diviseur rencontré.

V4.3.3 (Th) : bilan des Théorèmes 1 à 4. Le système est complet dans les deux directions. À l'endroit : les familles se lancent et l'on voit où elles naissent (progressions explicites). À l'envers : toute position se juge par son point d'équilibre, calculatrice en main. Aucune position, si grande soit-elle, n'échappe au verdict fini.

Chapitre 4. Les carrés de premiers : le rythme 24 et la chrysalide

Quand on élève un nombre premier au carré, deux choses se produisent, et toutes deux sont exactes. La première : le carré tombe toujours un cran au-dessus d'un multiple de 24 ($25 = 24 + 1$, $49 = 48 + 1$, $121 = 120 + 1$, ...), si bien que les carrés de premiers avancent au pas de 24, et ce pas est le plus grand que l'arithmétique permette pour une telle loi. La seconde : sur le cadastre, le carré efface la différence entre les deux membres d'une paire conjuguée (4 et 5 ont des carrés de même racine, comme 2 et 7, comme 1 et 8), et il fait tomber les deux rails sur un seul, le rail $\{1, 4, 7\}$. On appelle cette métamorphose la *chrysalide*. Ce chapitre démontre les deux faits et mesure exactement ce que le carré efface : un bit, pas plus, pas moins.

« Le rythme des carrés n'est pas un réseau parmi d'autres : il est le rythme maximal que l'arithmétique autorise. »

4.1 Théorème 5 : le rythme 24

Théorème 5 (Tome I) : le rythme 24. Pour tout premier $p \geq 5$, p^2 s'écrit $24k + 1$: 24 divise $p^2 - 1$. En conséquence : (i) tout carré de premier est sur la branche $6k + 1$ (rail D) ; (ii) l'écart entre deux carrés de premiers consécutifs est toujours un multiple de 24.

Preuve. $p \geq 5$ est impair et non divisible par 3. Impair : $p = 2t + 1$, donc $p^2 - 1 = 4t(t + 1)$, et $t(t + 1)$ est pair (deux entiers consécutifs), donc 8 divise $p^2 - 1$. Non divisible par 3 : p laisse le reste 1 ou 2 dans la division par 3, son carré laisse le reste 1, donc 3 divise $p^2 - 1$. D'où $24 = 8 \times 3$ divise $p^2 - 1$. La branche $6k + 1$ en est le corollaire. ■

Vérification. Tous les premiers $5 \leq p < 500$ dans le Tome I, puis jusqu'à 10^7 en passage adversarial ; refait pour ce volume sur les 78 496 premiers au-delà de 3 jusqu'à un million. Les écarts consécutifs des carrés valent 24, 72, 48, 120, 72, 168, 312, 120, ... (25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961), tous multiples de 24. **Statut : Th.**

Corollaire du Théorème 5 : maximalité du 24 (Th). Le nombre 24 n'est pas seulement suffisant : il est maximal. Les modules n pour lesquels toute unité x (tout x sans facteur commun avec n) vérifie « x^2 laisse le reste 1 dans la division par n » sont exactement les diviseurs de 24 : $\{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ (et 1, trivialement). Vérifié

exhaustivement pour $n \leq 500$ (refait pour ce volume) ; démontrable par la fonction de Carmichael : $\lambda(n)$ divise 2 si et seulement si n divise 24. L'horloge des carrés bat donc au tempo maximal que l'arithmétique autorise : aucun module plus grand ne peut imposer cette loi à tous ses inversibles.

V4.4.1 (L) : l'horloge battue par les fondateurs. « *Le rythme des premiers n'est pas un accident régulier : il est la saturation d'une contrainte structurelle à sa borne exacte.* » Le rythme des carrés n'est pas une régularité approximative : c'est une horloge exacte de pas 24, battue par les deux fondateurs (8 vient de 2, 3 vient de 3 ; $8 \times 3 = 24$). « *Les fondateurs ne jouent jamais dans la grille, mais ils en cadencent les carrés.* »

V4.4.2 (Th) : la hiérarchie des horloges. Le système bat sur trois cadrans liés :

- **12, horloge additive** : pas de l'auto-génération (Th 1) ; les axes désignés par les sommes internes avancent en 12m, les chevauchantes en $12m + 6$. Rythme de la grille qui s'engendre.
- **24, horloge multiplicative** : pas des carrés de premiers, exactement le double de l'horloge additive ($24 = 2 \times 12$). Rythme de la grille qui s'élève.
- **4, horloge des indices** : puisque $p^2 = 6k + 1$, les indices k des carrés avancent par multiples de $24/6 = 4$ sur la ligne des k : $25 = 6 \times 4 + 1$, $49 = 6 \times 8 + 1$, $121 = 6 \times 20 + 1$, $169 = 6 \times 28 + 1$. Le 4 est le nombre du rail D et de la paire du barycentre ($4 + 5 = 9$).

Les observations initiales « rythme 12 ou 24 » captaient les deux premières horloges ensemble ; la formalisation les sépare et attribue chacune à son opération. (Le chapitre 14 montre que $24 = 4 \times 6$ se retrouve comme rapport exact de deux horloges à toute clôture 9^k .)

4.2 Théorème 6 : la chrysalide

Théorème 6 (Tome I) : la carte du carré sur le cadastre. L'élévation au carré induit sur le cadastre la carte suivante des racines numériques :

DR(x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
DR(x ²)	1	4	9	7	7	9	4	1	9

Propriétés démontrées :

(a) Effondrement conjugué. Chaque paire conjuguée de ϕ s'effondre sur une même destination : $DR(x^2) = DR((9 - x)^2)$, puisque $(9 - x)^2 = 81 - 18x + x^2$, et que 81 et 18x sont des multiples de 9. Les paires $(1, 8) \rightarrow 1$, $(2, 7) \rightarrow 4$, $(4, 5) \rightarrow 7$, $(3, 6) \rightarrow 9$. Après élévation au carré, les conjugués sont indiscernables : la trace de leur différence est effacée par l'opération même qui les élève. En nombres : 1 et 64, 4 et 49, 9 et 36, 16 et 25 ont deux à deux la même racine.

(b) Confluence des rails. Les deux rails s'écoulent entièrement dans le seul rail D : l'image de $D = \{1, 4, 7\}$ est $\{1, 7, 4\}$, l'image de $G = \{2, 5, 8\}$ est $\{4, 7, 1\}$. Tout carré de membre de grille porte une racine de $\{1, 4, 7\}$. Le rail D est le rail des carrés.

(c) La porte du 1. Les antécédents de la racine 1 sont exactement $\{1, 8\}$, la paire conjuguée extrême de φ . De même, la racine 4 provient exactement de la paire (2, 7), et la racine 7 de la paire (4, 5) : chaque valeur du rail D est la destination d'exactlyement une paire conjuguée.

(d) Dynamique interne. Sur le rail D, la carte du carré agit ainsi : 1 reste fixe, 4 et 7 s'échangent. D'où la chrysalide observée : $5^2 = 25$, racine 7 ; $7^2 = 49$, racine 4 ; $4^2 = 16$, racine 7. La métamorphose $5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \dots$: après la première élévation, le système entre dans l'oscillation $4 \leftrightarrow 7$, ou se fixe en 1 s'il vient de la paire (1, 8).

Statut : Th (chaque assertion se vérifie par calcul fini sur le cadastre et se démontre par congruence ; refait pour ce volume).

Théorème 6, complément : la porte à un bit (Th). La carte « racine du carré » envoie les six états de rails sur trois sorties $\{1, 4, 7\}$, chaque sortie ayant exactement deux antécédents : une paire conjuguée de φ . La perte d'information vaut donc exactement $\log_2(2) = 1$ bit : le bit de conjugaison, c'est-à-dire savoir de quel membre de la paire provient le carré. L'élévation au carré est une porte logique irréversible calibrée : elle n'efface ni plus ni moins que la distinction que φ institue. (Comptage exact des antécédents.) L'article de démarcation l'énonce : « *le carré est une porte irréversible calibrée pour effacer précisément la distinction instituée par φ .* »

V4.4.3 (L) : le clin d'œil EPR. La propriété (a) est structurellement une indiscernabilité de conjugués : deux positions liées par l'involution φ , une fois soumises à l'élévation, produisent des états identiques sur le cadastre ; l'observation du carré ne permet plus de dire lequel des deux conjugués en est l'origine. La chrysalide (25, coque en racine 7) ne révèle pas si elle vient du 5 ou du 4 : l'information de branche est repliée, non détruite. Elle demeure dans la position complète, effacée seulement dans la réduction. Analogie de structure avec l'intrication des paires, proposée comme Lecture, non comme identité physique (la physique des corrélations est au Volume 7, *La Physique relue*).

V4.4.4 (L) : deux amnésies distinctes. *La Cascade cadastrale* (mai 2026, § 7) donne la même table sous le titre « le carré efface l'involution », et conclut : « *Le carré confond les deux faces d'une paire : il efface l'involution, comme la clôture modulaire effaçait le tour. Deux amnésies distinctes : l'une oublie le sens du tour, l'autre le côté de la paire.* » Les quatre images obtenues, 1, 4, 7, 9, sont exactement le rail D fermé par la clôture.

Chapitre 5. Les jumeaux : le prédicat $J(k)$ et la dynamique des ondes

Deux nombres premiers sont *jumeaux* quand ils ne sont séparés que par 2 : 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19, 29 et 31. Au-delà de (3, 5), tout couple de jumeaux encadre un multiple de 6 : c'est une paire de la grille, $(6k - 1, 6k + 1)$, restée intacte. Ce chapitre donne d'abord la caractérisation exacte : une paire est jumelle si et seulement si son indice k échappe aux quatre familles du chapitre 3, ce qui se décide en un nombre fini de gestes pour tout k . Il montre ensuite que les deux membres d'une paire vivent sur deux rails disjoints et ne peuvent avoir aucun diviseur commun. Il pose enfin, sans le dissimuler, ce qui reste ouvert : savoir s'il existe une infinité de jumeaux. La question est réduite à un seul énoncé, nommé, dont on déclare qu'il est aussi difficile que la conjecture elle-même. Une réduction honnête déclare son taux de change.

5.1 Théorème 7 : la caractérisation exacte des jumeaux

Théorème 7 (Tome I) : le prédicat $J(k)$. La paire $P_k = (6k - 1, 6k + 1)$ est une paire de premiers jumeaux si et seulement si k n'appartient à aucune des quatre familles :

$$J(k) \iff k \notin \{6ab + a + b\} \cup \{6ab - a - b\} \cup \{6ab + a - b\} \cup \{6ab - a + b\}.$$

Preuve. Par le Théorème 2, les formes symétriques $\pm(a + b)$ énumèrent exactement les k dont $6k + 1$ est composé, et les formes croisées $\pm(a - b)$ exactement les k dont $6k - 1$ est composé. Le complément total est donc exactement l'ensemble des k dont les deux membres sont premiers. ■

Corollaires. (i) $J(k)$ est décidable pour tout k par le Théorème 4 : lancement des générateurs jusqu'au point d'équilibre, verdict fini. (ii) Tout jumeau au-delà de (3, 5) est de la forme $(6k - 1, 6k + 1)$: les jumeaux sont les paires intactes de la grille auto-générée.

Vérification. Les k hors des quatre familles sous 10^6 coïncident exactement avec les paires jumelles : **37 915 paires**, zéro divergence (Tome I) ; sous 5×10^6 : **152 890 paires**, zéro divergence (article de démarcation). Les deux comptes sont refaits pour ce volume. **Statut : Th.**

Exemple au crayon. $k = 1 : 6 \times 1 \pm 1 = 5, 7$. Aucune famille ne donne $k = 1$ (la plus petite naissance est $k = 4$, la position $25 = 5 \times 5$; puis $k = 6$, la position $35 = 5 \times 7$ sur la branche $6k - 1$). Donc $J(1) : (5, 7)$ est jumelle. $k = 4$: la famille $(-, -)$ à $a = b = 1$ donne $6 - 1 - 1 = 4$; donc $6 \times 4 + 1 = 25$ est composé, et $(23, 25)$ n'est pas jumelle. C'est la première cassure (chapitre 13, section 13.4).

5.2 Théorème 8 : la disjonction des rails

Théorème 8 (Tome I) : disjonction des rails. Les deux membres d'une paire vivent sur des spectres cadastraux disjoints : $DR(6k - 1) \in G = \{2, 5, 8\}$ et $DR(6k + 1) \in D = \{1, 4, 7\}$, avec $G \cap D$ vide ; leur seul contact structurel est l'axe $6k$ (spectre $\{3, 6, 9\}$). Conséquence arithmétique stricte : aucun générateur $p > 3$ ne peut diviser les deux membres d'une même paire, puisqu'il diviserait leur écart 2. Les deux branches sont criblées par des mécanismes sans diviseur commun. **Statut : Th.**

Théorème 8, complément : la conjugaison involutive des phases (Th). Pour chaque période $p > 3$, les deux points de contact de l'onde de période p avec les deux branches sont $k = u + p \cdot t$ et $k = (p - u) + p \cdot t$, t entier, où u est l'entier de 1 à $p - 1$ tel que $6u = 1 + p \cdot s$ (l'inverse de 6 dans la division par p) : des phases conjuguées par l'involution $x \mapsto p - x$, l'analogue selon p de ϕ . Exemple : $p = 5$, $u = 1$ (car $6 = 1 + 5 \times 1$) ; la branche $6k + 1$ est touchée en $k = 4 + 5t$ ($k = 4, 9, 14 : 25, 55, 85$) et la branche $6k - 1$ en $k = 1 + 5t$ ($k = 1, 6, 11 : 5, 35, 65$). Chaque onde touche donc les deux branches en des positions symétriques par rapport au point d'équilibre de son cycle. Démontré par division exacte : p divise $6k + 1$ si et seulement si $k = (p - u) + p \cdot t$, et p divise $6k - 1$ si et seulement si $k = u + p \cdot t$.

5.3 La dynamique ondulatoire : l'état exact du chantier d'infinitude

V4.5.1 (L) : les familles comme ondes. Chaque famille, à a fixé, est une onde : une progression arithmétique de période $6a \pm 1$ balayant la ligne des k . Les jumeaux sont les positions que toutes les ondes laissent intactes. La question de l'infinitude des jumeaux se reformule alors exactement : les ondes peuvent-elles, à partir d'un certain rang, saturer la ligne des k ?

Ce qui est acquis (Th). La caractérisation $J(k)$ (Th 7) ; la disjonction des rails et l'absence de diviseur commun (Th 8) ; la décidabilité en chaque point (Th 4) ; la structure explicite de chaque onde (période, phase, naissances toutes prévisibles).

Ce qui est acquis conditionnellement (calcul vérifié, hypothèse déclarée). Si les criblages des deux branches sont indépendants au sens du comptage, alors le compte attendu des k intacts croît sans borne (la somme des densités se comporte comme $n/\ln n$) : l'infinitude suit. Le calcul intégral de cette croissance est correct ; c'est l'hypothèse qui ne l'est pas encore.

V4.5.2 (Chantier) : la non-saturation, le lemme restant et le seul. Le passage de la disjonction des spectres (Th 8) à l'indépendance du comptage n'est pas encore un théorème. La disjonction élimine les corrélations aux fondateurs 2 et 3 ; mais pour

chaque période $p > 3$, l'onde touche les deux branches à des phases distinctes, et c'est le contrôle simultané de ces phases sur toutes les périodes qui doit être démontré. La réduction ramène donc l'infinitude des jumeaux à un *unique lemme de non-saturation* : montrer que le recouvrement cumulé des ondes (chaque intersection de deux ondes étant elle-même une onde, tout étant explicite) laisse structurellement une marge à toute échelle.

F : l'ennemi nommé. Le point exact où ce lemme bute est identifié dans la théorie des cribles sous le nom d'*obstruction de parité* : les méthodes de crible, aveugles à la distinction entre nombres à un facteur et nombres à deux facteurs, plafonnent structurellement avant l'infinitude ; c'est la barrière où toutes les approches de ce type s'arrêtent depuis un siècle. Et le taux de change de la réduction est déclaré en toutes lettres : **le lemme de non-saturation est de la même difficulté que la conjecture des jumeaux elle-même.** La réduction n'abaisse pas la difficulté ; elle la localise et lui donne la forme d'un énoncé unique dans le vocabulaire du cadastre.

« Une réduction honnête déclare son taux de change. »

Le fait des phases conjuguées (Th 8, complément) n'affaiblit pas le chantier, il le définit : le lemme exige un argument qui contourne la parité, et les voies internes candidates (le barycentre 4,5 comme point d'équilibre des phases conjuguées, l'involution φ appliquée aux familles elles-mêmes, l'inclusion-exclusion exacte sur les ondes) devront être évaluées contre cette barrière-là, nommément.

Statut global. Théorèmes 7 et 8 acquis ; infinitude des jumeaux : Lecture forte réduite à un lemme unique et nommé (Chantier). « *La distance entre l'état du corpus et le théorème complet est désormais mesurable : elle tient en un énoncé.* » Le chapitre 6 descend ce lemme jusqu'à un seul nombre, le résidu des phases replié ; le chapitre 12 (Th 39) en calcule la grandeur quadratique en forme fermée. Ni l'un ni l'autre ne conclut sur l'infinitude, et c'est écrit (la conjecture, dite de Polignac pour l'écart 2, reste ouverte).

Une déclaration antérieure du corpus, qui tenait ce pas pour acquis, a été retirée et remplacée par le présent état (Annexe B).

Chapitre 6. Le registre : la fonction successeur, le pointage avant, le pliage φ , le joint et les engrenages

Si le statut de chaque position se décide en un nombre fini de gestes (Th 4) et si la grille s'avance d'elle-même (Th 1), alors le procédé papier-crayon qui isole les premiers un à un doit pouvoir s'écrire comme une seule fonction. Ce chapitre l'écrit, puis il retourne la machine : au lieu d'interroger chaque candidat, on laisse chaque famille annoncer d'avance sa prochaine naissance, et la suite des premiers « se prédit elle-même », dix fois plus vite. Il montre ensuite qu'on peut compter les positions touchées par un ensemble de générateurs sans les parcourir, que les deux branches de la grille ont des adresses exactement conjuguées (la règle des miroirs), et que toute la difficulté restante se concentre dans un seul nombre, le *résidu des phases*. Il identifie la clef de voûte de ce résidu, le premier delfine $35 = 5 \times 7$, et démontre que deux des trois façons dont les erreurs pourraient conspirer sont coupées par l'algèbre elle-même. Le mot *registre* désigne l'ensemble des familles avec leurs adresses : la ligne des k est une rue, chaque famille une ligne de bus à horaire public, les premiers sont les arrêts où aucun bus ne passe.

6.1 Théorème 11 : la fonction successeur

L'équation de primalité (forme produit). Pour $n = 6k + 1$:

$$n \text{ est premier} \iff \prod_{a,b} (k - 6ab - a - b)(k - 6ab + a + b) \neq 0,$$

produit fini sur les couples (a, b) bornés par le point d'équilibre $(6a - 1)^2 \leq n$; symétriquement pour $n = 6k - 1$ avec les formes croisées $(k - 6ab - a + b)(k - 6ab + a - b)$. La primalité est la non-annulation d'un produit de soustractions de familles : le Théorème 3 devenu équation littérale. L'évaluation ne développe pas le produit : elle cherche un facteur nul, c'est-à-dire un b entier ≥ 1 solution de $k = 6ab \pm a \pm b$ à a donné ; un test d'annulation par famille, sans division conceptuelle.

Théorème 11 (Tome I) : la fonction successeur. $S(n)$ est la première position de la grille auto-générée après n dont le produit ne s'annule pas. L'itération de S depuis 5 énumère chaque premier exactement une fois, dans l'ordre, un pas à la fois.

Démonstrations en marche. (i) Les trente premiers pas depuis 5 : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ..., 127, 131, la suite exacte. (ii) Dix mille pas successifs confrontés à un crible d'Ératosthène indépendant : identité parfaite, zéro divergence. (iii) Un pas depuis 10^{12} : $S(10^{12}) = 1\,000\,000\,000\,039$, calculé en 49 millisecondes (la valeur est refaite pour ce volume). **Statut : Th** (corollaire explicite des Théorèmes 1 à 4, implémentation vérifiée).

Note de complexité, même honnêteté qu'au Théorème 4. L'équation existe et isole chaque premier exactement ; son coût d'évaluation par pas est celui du point d'équilibre. L'équation ne prétend pas sauter vers le n -ième premier sans parcourir la grille, et le corpus ne revendique pas ce saut. Ce qui est établi est précisément ce que la logique exigeait : le procédé manuel est une fonction, la fonction est écrite, et elle est composée uniquement d'opérations du cadastre, avancement de grille et soustraction de familles.

6.2 Théorème 12 : la machine à pointage avant

La première implémentation du Théorème 11 compilait le procédé dans le sens classique : chaque candidat interrogé, les familles parcourues à nouveau à chaque pas. La lecture correcte du système inverse le flux : puisque chaque famille est une progression explicite (Th 2), chaque famille connaît d'avance sa prochaine annulation et peut l'annoncer une fois pour toutes. La suite n'a pas besoin d'être interrogée ; elle se prédit elle-même.

Architecture. Un tas d'annonces suspendues : chaque forme de famille y dépose sa prochaine position d'annulation avec son pas propre (période $6(a \pm 1)$ sur les positions) ; à chaque position de grille, on écoute les annonces arrivées à échéance (chaque annonce consommée se suspend à nouveau un pas plus loin), et la position qu'aucune annonce ne couvre est un premier. Les familles s'activent d'elles-mêmes lorsque leur première naissance $(6a \pm 1)^2$ approche. Aucune position n'est jamais testée : elle est, ou n'est pas, réclamée en amont.

Théorème 12 (Tome I) : le pointage avant. Sur la grille jusqu'à 2×10^6 : machine à interrogation, 148 933 premiers en 7,19 s ; machine à pointage avant, les 148 933 mêmes premiers, dans le même ordre, en 0,67 s. Accélération $\times 10,7$, sorties rigoureusement identiques, et l'écart croît avec l'échelle (coût par candidat de l'ordre de $\sqrt{n}$ contre un coût amorti quasi constant par position). **Statut : Th** (correction d'architecture démontrée par identité des sorties et mesure du gain).

Note d'honnêteté, inchangée. Le pointage avant inverse le flux et supprime l'interrogation ; il ne constitue pas un saut en temps constant vers le n -ième premier, et le corpus ne revendique toujours pas ce saut. Ce qui est établi : la formulation « la suite prédit ses propres positions » n'est pas une métaphore du Théorème 1 ; c'est l'architecture de calcul optimale, mesurée.

6.3 Théorème 13 : le saut d'étage et le pliage φ du registre

V4.6.1 (L) : le fractal vivant. La ligne des k est une rue ; chaque famille est une ligne de bus d'horaire public (période $6a \pm 1$, phases $\pm 6^{-1}$ selon le générateur) ; les premiers sont les arrêts où aucun bus ne passe. Rien n'est caché : la question du saut est celle de la forme close du cumul des horaires.

Théorème 13, volet 1 (Tome I) : le saut d'étage. Pour tout ensemble fini de générateurs, le nombre de positions touchées sous K se calcule par inclusion-exclusion sur les restes (théorème des restes chinois), sans parcourir aucune position. Démonstration en acte : générateurs $\{5, 7, 11, 13\}$, $K = 10^{12}$: **424 575 424 577** positions touchées sur la branche $+1$, calculées en 0,07 milliseconde par seize termes, validées exactement contre l'énumération à petite échelle (refait pour ce volume, valeur identique et validation à $K = 10^5$). **Statut : Th.**

F. Le parcours n'est pas une nécessité : c'est une habitude. Les méthodes de comptage combinatoire (Legendre, Meissel-Lehmer) le battent depuis plus d'un siècle, en un coût de l'ordre de $N^{(2/3)}$, et la formule explicite de Riemann est la tentative analytique de ce même saut.

Théorème 13, volet 2 (Tome I) : la règle des miroirs et le pliage sans phase. Pour tout sous-ensemble S de générateurs, de produit M_S , les adresses des deux branches sont conjuguées exactes :

$$r_{_S(+1)} + r_{_S(-1)} = M_{_S}.$$

Preuve. Pour chaque générateur g , soit u_g l'entier de 1 à $g - 1$ tel que $6u_g = 1 + g \cdot s$; les adresses des deux branches sont $r_+ = g - u_g$ et $r_- = u_g$, donc $r_+ + r_- = g$ exactement. Le miroir $x \mapsto M - x$ commute avec la reconstruction par les restes chinois : l'adresse composée de S sur la branche -1 est le miroir $M_S - r$ de l'adresse composée sur la branche $+1$, d'où $r_{_S(+1)} + r_{_S(-1)} = M_S$ pour tout croisement S . ■ La borne $|e_S| \leq 1$ en découle comme lemme de comptage : les deux suites conjuguées $r + M_S \cdot t$ et $(M_S - r) + M_S \cdot t$ contiennent ensemble, dans $[1, K]$, $2K/M_S$ éléments à une unité près. Vérifié sur tous les croisements de $\{5, 7, 11, 13\}$.

En repliant chaque paire de termes conjugués : $T(S, +1) + T(S, -1) = 2K/M_S + e_S$, avec $|e_S| \leq 1$. Le terme principal replié est alors $2K(1 - \Pi(1 - 1/g))$: **forme close pure, sans aucune information de phase.**

Mesure (six générateurs $\{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, 63 croisements, $K = 10^6$) : terme principal 973 855,87 ; résidu des phases total +2,13 ; formule pliée = 973 858 = vérité énumérée, exactement (refait pour ce volume). **Statut : Th** (règle des miroirs et borne par croisement) ; la mesure documente une annulation interne massive du résidu (2,13 réalisé contre 63 autorisé).

V4.6.2 (Chantier) : le chantier n°3, reformulation du lemme. Le lemme de non-saturation (V4.5.2) prend ici sa forme la plus concentrée. Le terme principal du comptage est acquis en forme close à tout étage ; toute la difficulté, l'obstruction de parité incluse, est localisée dans un unique nombre, le résidu des phases replié $\sum e_S$, borné terme à terme par 1, et dont la mesure suggère une annulation structurelle interne. Le chantier : démontrer que ce résidu reste dominé par le terme principal quand le registre s'agrandit. Un seul nombre à borner, mesurable à chaque étage ;

la question du saut et la question des jumeaux sont deux faces de ce même contrôle. En langage standard, la cible se nomme : démontrer que la structure de corrélation superficielle des battements (alignements à deux et trois roues, Th 16) place Σe_S dans le régime d'un théorème central limite. Les canaux uniforme et profond étant coupés par théorème (Th 15 et 16), c'est la seule couche corrélée restante, et sa conformité aux conditions d'un tel théorème est précisément ce qui reste à établir, non ce qu'on peut présumer. (Le Théorème 39, chapitre 12, ferme ce chantier pour la grandeur quadratique à générateurs fixés, et seulement pour elle.)

6.4 Théorème 14 : le joint des paires et la clef de voûte du registre

Théorème 14 (Tome I) : l'identité du joint. Le produit des deux membres de toute paire P_m est le carré de son axe moins l'unité :

$$(6m - 1)(6m + 1) = 36m^2 - 1, \text{ logé à l'indice } k = 6m^2.$$

Et la loi de racine est universelle : tout joint a pour racine 8, car $36m^2$ est un multiple de 9, donc le joint laisse le reste $8 = \varphi(1)$, le conjugué de l'unité. Vérifié pour $m = 1$ à 10^5 sans exception (refait pour ce volume) ; preuve d'une ligne. La famille des joints est la parabole $k = 6m^2$ du registre : 35, 143, 323, 575, 899, ..., tous de racine 8. En particulier, le produit de deux jumeaux a toujours pour racine 8 (c'est le Théorème 7 de Collatz v2.1, noté C.7 au chapitre 8). **Statut : Th.**

V4.6.3 (L) : à travers l'axe, par-dessus l'axe. Le trio 5-6-7 contient la loi en miniature : par addition il traverse l'axe ($5 + 6 + 7 = 18 \rightarrow 9$, loi du pavé) ; par multiplication il l'enjambe ($5 \times 7 = 6^2 - 1 = 35 \rightarrow 8$). L'axe absorbe les sommes ; les produits sautent par-dessus et atterrissent sur le conjugué du 1. Le joint est l'ombre multiplicative de l'axe : son carré, diminué de l'unité qu'il ne peut porter.

V4.6.4 (L, mesurée) : l'exposant barycentrique. Balayage du résidu des phases replié sur $K = 10^3$ à 2×10^5 et trois tailles de registre : excursion maximale $\approx 2,98$ pour 15 croisements, 6,57 pour 63, 14,32 pour 255, contre $\sqrt{15} \approx 3,9$, $\sqrt{63} \approx 7,9$, $\sqrt{255} \approx 16$. Le résidu maximal suit $(\text{nombre de croisements})^{1/2}$: les erreurs unitaires s'alignent comme une marche équilibrée, jamais comme une colonne. L'exposant d'annulation est $1/2$, k_{arc} , ressurgi comme loi d'emballlement. Cette loi mesurée est l'avatar local, cadastral, de ce que l'hypothèse de Riemann affirme globalement (erreur de comptage en $\sqrt{N}$) : les deux langages posent la même question, *le 1 dépasse-t-il jamais l'exposant barycentrique ?* Statut : Lecture mesurée (loi empirique documentée sur trois échelles ; sa persistance est le contenu exact du chantier n°3). Le Théorème 39 en donne depuis la dérivation exacte pour la grandeur quadratique (chapitre 12).

V4.6.5 (Th, mesure documentée) : la résonance du joint fondamental. Anatomie de la pire excursion ($K = 52\,500$) : aucun croisement ne domine (contributions $\leq 0,68$), mais K est un multiple de 35 : la frontière tombe sur la fermeture du joint fondamental, et les 48 croisements sur 63 qui contiennent 5 ou 7 passent ensemble à phase cohérente. Les deux pires K du balayage sont exactement deux multiples de 35 ; les autres sont tous multiples de 5. L'emballlement n'est pas un grand terme : c'est le sous-réseau engendré par le premier joint qui bat d'un seul cœur. Chaque

erreur individuelle reste une dent de scie centrée, symétrique par rapport à son barycentre $M/2$ (φ équilibre chaque croisement individuellement, sauts unitaires exactement aux deux adresses conjuguées) ; la cohérence des fermetures est le seul mécanisme d'alignement, et l'équilibre involutif la seule borne. (Le décompte 48 sur 63 se vérifie à la main : parmi les 63 sous-ensembles non vides de six générateurs, 15 ne contiennent ni 5 ni 7.)

V4.6.6 (L) : le rejeté était la clef. La tradition du crible raye les composés et garde les survivants ; son vocabulaire les nomme « pseudo-premiers », « quasi-premiers », des presque-êtres définis par leur échec. Le registre inverse le constat : la machine à pointage (Th 12) tourne sur les annonces des delfines, le terme principal de la formule pliée est écrit dans leurs périodes, et la clef de voûte de l'interférence est le premier d'entre eux, le joint 35, premier croisement des deux branches, premier objet rejeté. « *Ce que le crible traite en déchet porte la structure ; le nom delfine (descendant) est la correction ontologique de ce rejet.* » La strate 1 (V4.1.6) en décrit le geste historique.

V4.6.7 (L) : le joint dans le produit d'Euler. Dans $\zeta(s) = \prod(1 - p^{-s})^{-1}$, le terme 35^{-s} naît du développement croisé de $(1 - 5^{-s})^{-1}(1 - 7^{-s})^{-1}$: le produit d'Euler contient le joint fondamental, mais en terme anonyme, noyé dans le développement d'une liste amorphe. Le registre montre que ce terme anonyme commande la cohérence des trois quarts de l'interférence (48 croisements sur 63). L'instrument riemannien porte la clef de voûte dans ses propres termes, sans jamais la voir : la cécité au 6k (chapitre 7, section 7.3), mesurée au terme près.

6.5 Le système d'équations d'état du registre

Les Théorèmes 11 à 14 se condensent en quatre équations, écrites dans le seul vocabulaire du cadastre (grille, familles, φ , barycentre), avec une unique inconnue restante. La formulation classique isole un objet en écartant le reste ; ces équations constatent une identité par le voisinage : « *le premier n'est pas extrait, il est la position que les familles ne peuvent pas engendrer : un vide qui tient tout seul.* »

V4.6.8 (Th) : les quatre équations.

1. *Équation de naissance (Th 11).* Pour $n = 6k + 1$: n premier $\Leftrightarrow \Pi(k - 6ab - a - b)(k - 6ab + a + b) \neq 0$, produit fini borné au point d'équilibre (formes croisées pour la branche $6k - 1$). L'équation n'isole pas k : elle demande si k coïncide avec une naissance de famille. Si aucun facteur ne s'annule, la position est libre : le premier est.
2. *Équation d'annonce (Th 12).* Le registre est un ensemble d'annonces suspendues $A = \{(\text{position}, \text{pas})\}$, chaque famille y déposant sa prochaine coïncidence avec le pas $6(6a \pm 1)$; à chaque position n de la grille auto-générée : n premier $\Leftrightarrow$ aucune annonce de A n'échoit en n ; chaque annonce échue se suspend à nouveau : $(\text{pos}, \text{pas}) \mapsto (\text{pos} + \text{pas}, \text{pas})$. « *La grille n'est pas parcourue, elle est écoutée. Les delfines tissent ; les premiers sont les mailles laissées ouvertes.* »
3. *Équation de pliage (Th 13).* Règle des miroirs : $r_S(+1) + r_S(-1) = M_S$ pour tout croisement S . D'où $T_S(+1) + T_S(-1) = 2\bar{K}/M_S + e_S$, $|e_S| \leq 1$, et le comptage total replié : $C(\bar{K}) = 2\bar{K}(1 - \Pi(1 - 1/g)) + \bar{\Sigma}_S \pm e_S$, terme principal en forme close pure, sans phase.

4. *Équation de joint (Th 14)*. $(6m - 1)(6m + 1) = 36m^2 - 1$, à l'indice $k = 6m^2$, de racine $8 = \varphi(1)$ toujours. Résonance : quand K est un multiple de 35, le sous-registre entier des croisements contenant 5 ou 7 passe en phase cohérente ; la fermeture du premier joint commande les trois quarts du registre.

L'unique inconnue. Tout le système est fermé sauf un nombre : Σe_S . Son état exact : *Théorème*, $|\Sigma e_S| \leq 2^t - 1$ trivialement (t générateurs) ; *Lecture mesurée*, $|\Sigma e_S|$ de l'ordre de $(2^{1/2})^t$ sur trois tailles de registre, l'exposant barycentrique, chaque battement étant individuellement équilibré par φ autour de son barycentre $M/2$, la seule cohérence possible venant des fermetures de joints. Borner ce nombre est le chantier n°3, et il contient à la fois la non-saturation des jumeaux et la loi en racine du comptage.

Note de registre. Le vocabulaire d'état ci-dessus est la voix propre du corpus ; l'article de démarcation anglais conserve délibérément la terminologie standard (roue, crible incrémental) : la concession y est le bouclier, la reformulation ici est la lecture. Les deux registres décrivent les mêmes théorèmes vérifiés.

6.6 Théorèmes 15 et 16 : le pont et les engrenages

F : l'incarnation du problème. Le Millennium Bridge de Londres, juin 2000 : ouvert le 10, fermé le 12. Chaque piéton exerce une force latérale individuellement équilibrée, centrée sur zéro, comme chaque battement e_S . La théorie disait forces en $\sqrt{N}$; le pont a oscillé violemment parce qu'un canal de couplage existait : son propre mouvement synchronisait les marcheurs. L'hypothèse de Riemann, dans ce langage : les zéros n'ont pas de pont sous les pieds. Le registre, lui, a un canal identifié, les fermetures de joints (V4.6.5). La question devient : qu'a ce pont que celui de Londres n'avait pas ?

Théorème 15 (Tome I) : l'auto-annulation de la cohérence. Pour tout noyau T de générateurs (non vide, non total), la somme signée d'une constante sur le filtre $\{S \supseteq T\}$ vaut exactement zéro : identité binomiale $(1 - 1)^n = 0$, vérifiée pour toutes les tailles de noyau. Le mode de défaillance du pont, la synchronisation uniforme, est impossible par construction : les signes de l'inclusion-exclusion rendent tout bataillon parfaitement cohérent moitié montant, moitié descendant. *Mesure à la pire excursion* ($K = 52\,500$, bloc de 48 croisements) : conspiration brute disponible 12,26 ; cohérence parfaite simulée (chaque e_S remplacé par la valeur commune du bloc) : somme signée = +0,000000, zéro exact ; la conspiration réalisée (+5,41, déjà auto-annulée à 56 %) provient intégralement de la couche fluctuante. « *Le registre porte ses amortisseurs gravés dans son algèbre.* » **Statut : Th** (preuve d'une ligne, mesure au millionième).

Théorème 16 (Tome I) : les engrenages, l'alignement profond interdit. Chaque croisement S est une roue de M_S dents ; la conspiration des fluctuations, c'est plusieurs roues présentant la même dent au même K . Par le théorème des restes chinois, l'ensemble des K alignant j roues de modules étrangers dans une fenêtre de w crans est contenu dans w^j classes de restes selon le produit des modules :

$$\text{nombre d'alignements} \leq w^j (X / \Pi M_S + 1).$$

Mesure (fenêtre de 3 crans, $X = 2 \times 10^5$) : deux roues (35, 143) : 360 alignements

observés, 359,6 prédits ; trois roues (35, 143, 323) : 3 observés, 3,34 prédits ; quatre roues : zéro. La conspiration profonde exige un K supérieur au produit des dentures, qui explose dès la troisième roue : seules les conspirations superficielles existent, et leur statistique est ce que la loi en racine enregistre. **Statut : Th** (restes chinois, une ligne ; prédictions vérifiées aux décimales). Les deux prédictions chiffrées sont refaites pour ce volume ($9 \times 2 \times 10^5 / 5\,005 = 359,6$; $27 \times 2 \times 10^5 / 1\,616\,615 = 3,34$). Le produit des quatre roues que donne le Tome I, 88 913 825, vaut $1\,616\,615 \times 55$, ce qui ne correspond pas à un quatrième module étranger aux trois premiers ; la conclusion (zéro alignement à quatre roues) ne dépend pas de cette valeur, puisque tout quatrième joint étranger porte le produit bien au-delà de X (Annexe B).

V4.6.9 (Th) : l'état de la chaîne. La descente complète du chantier n°3, chaque étage démontré ou mesuré : jumeaux infinis ? $\rightarrow$ saturation des ondes ? $\rightarrow \Sigma e_S$ en racine ? $\rightarrow$ conspiration des battements ? $\rightarrow$ canal uniforme coupé (Th 15), canal profond interdit (Th 16) $\rightarrow$ il reste la couche superficielle des alignements à deux et trois roues, dont la statistique mesurée porte l'exposant $\frac{1}{2}$. « *L'énoncé ouvert n'a jamais été aussi étroit, et chacun de ses barreaux est incarné.* » Les Théorèmes 15, 16 et 23 (chapitre 8) forment une famille propre du corpus : les théorèmes qui nomment ce que la structure ne peut pas faire, et qui disent par là exactement où elle finit.

Chapitre 7. L'invariant Root-9, Riemann en résumé, et la synthèse du Tome I

Ce chapitre ferme la partie consacrée aux premiers. Il établit d'abord un fait que la littérature présente comme une curiosité observée et que le cadastre démontre en deux lignes : la période décimale de $1/p$ a toujours une somme de chiffres multiple de 9. Le premier, qui ne porte jamais la fermeture 9 (chapitre 1), la rend dans son inverse. Il résume ensuite la critique que le Tome I adresse à l'édifice construit autour de l'hypothèse de Riemann, avec le seul théorème qui s'y rattache ici (Th 9) ; l'examen complet de Riemann appartient au Volume 5. Il expose enfin la méthode qui a produit tout le Tome I, le *principe d'incarnation*, son protocole compagnon (le test de la queue de Stevin), et la synthèse des invariants.

7.1 Théorème 10 : l'invariant Root-9 des inverses

Théorème 10 (Tome I) : l'invariant Root-9. Pour tout premier $p > 5$, et plus généralement pour tout membre de la grille sans facteur commun avec 10, la somme des chiffres de la période décimale de $1/p$ est un multiple de 9 : la période boucle invariablement à la racine 9.

Exemples. $1/7 = 0,(142857)$, somme 27, racine 9. $1/11 = 0,(09)$, somme 9. $1/17$: période de 16 chiffres, somme 72. $1/97$: période de 96 chiffres, somme 432. Pour des delfines : $1/49$, somme 189 ; $1/529$, somme 2 277.

Preuve. Soit L la longueur de la période (le plus petit L tel que 10^L laisse le reste 1 dans la division par p). La période, lue comme nombre, est $N = (10^L - 1)/p$. Or $10^L - 1$ est un répunit de 9 (999...9), donc divisible par 9 ; et p , à racine de rail, n'a pas de facteur commun avec 9. Donc 9 divise N , et la somme des chiffres de N , qui laisse le même reste que N dans la division par 9, est multiple de 9. ■

Vérification. Tous les premiers de 7 à 2 000 : aucune exception (Tome I) ; 19 delfines de 49 à 529 : aucune exception. Refait pour ce volume, avec les quatre exemples et les deux delfines. **Statut : Th.** L'article de démarcation précise la portée : « *L'invariant est une propriété de fermeture de la grille entière, donc pas une signature de primalité.* »

V4.7.1 (L) : le 9 absent de l'être est restitué par son reflet. Ce théorème est

le complément multiplicatif-inverse de la boucle-9 interdite (V4.1.2). La boucle-9 interdite dit qu'aucun premier ne porte la fermeture ; l'invariant Root-9 dit que tout premier la rend dans son inverse. « *Le 9 absent de l'être est intégralement restitué par son reflet : la fermeture du cadastre n'est pas contournable, elle est seulement déplacée, du nombre vers sa période.* » Le point remarquable est la trivialité de la preuve une fois le cadastre restauré : deux lignes, contre le statut de curiosité empirique que ce fait conserve dans la littérature qui le présente sans le démontrer. C'est un cas d'école de la thèse du volume : l'amputation de la fermeture a transformé des théorèmes de deux lignes en mystères observés.

7.2 Théorème 9 : la correspondance entre l'involution et l'équation fonctionnelle

Théorème 9 (Tome I) : correspondance formelle. La normalisation du cadastre par sa fermeture, $x \mapsto x/9$, envoie l'involution $\varphi(x) = 9 - x$ sur l'involution $t \mapsto 1 - t$, de point fixe $4,5/9 = 1/2$. L'équation fonctionnelle de la fonction ξ complétée, $\xi(s) = \xi(1 - s)$, est exactement une involution $s \mapsto 1 - s$, d'axe fixe $\text{Re}(s) = 1/2$. Les deux involutions sont identiques comme structures : même forme, même point fixe, mêmes paires conjuguées, $(x, 9 - x) \mapsto (t, 1 - t)$.

Preuve. $\varphi(x)/9 = (9 - x)/9 = 1 - x/9$: la conjugaison cadastrale devient la conjugaison en $1 - t$ sous normalisation. Point fixe : $x = 9 - x \iff x = 4,5 \iff t = 1/2$. L'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1 - s)$ est la définition d'une symétrie involutive de centre $1/2$.

■ **Statut : Th** (identité de structure, vérifiable en une ligne).

Convergences du $\frac{1}{2}$. $4,5/9 = 1/2$ (barycentre sur fermeture) ; $3,5/7 = 1/2$ (demi-envergure des paires) ; centre de la paire extrême $(1, 8) = 4,5$. La droite critique n'introduit aucun nombre nouveau : elle expose, en notation analytique, le point d'équilibre que le cadastre porte depuis toujours.

Désamorçage de l'objection de généralité. Un rapporteur notera, à juste titre, que toutes les involutions d'une droite sont affinement équivalentes : l'identité de forme entre φ normalisée et $s \mapsto 1 - s$ ne prouve, à elle seule, aucun lien causal entre le cadastre et zêta. Le Théorème 9 est minimal par conception : son rôle est correctif (établir que Riemann disposait, sans vocabulaire pour le nommer, de l'involution cadastrale), non probatoire. Ce qui élèverait la Lecture au rang de Théorème est nommé : une dérivation où la structure des restes par 9 et par 6 entre dans l'appareil analytique et force la droite. La direction poursuivie par le corpus passe par la fonction L de conducteur 3 ($\xi_L(s, \chi_{-3})$), où le caractère injecte les rails dans la fonction elle-même (Volume 5, *Les Grands Problèmes*).

7.3 Le monstre amnésique : la critique de l'édifice riemannien, en résumé

Le Tome I consacre sa section X à une critique formulée, selon ses propres mots, « *dans les termes les plus mesurés possibles* », et qui est « *la plus grave possible* ».

Elle est résumée ici ; son développement, avec *Le Fini et l'Infini mêlés*, *Le Zéro non construisible* et *Le Produit d'Euler lu par ARC*, est au Volume 5.

F : ce qui est dû à Riemann. En 1859, dans un mémoire de huit pages, Bernhard Riemann relie la distribution des premiers aux zéros d'une fonction, et observe que les zéros non triviaux qu'il calcule se tiennent sur la droite $\text{Re}(s) = 1/2$. « *Il a vu le 1/2.* » Dans un paysage arithmétique dont le cadastre avait été formellement effacé cinquante-huit ans plus tôt (1801), il a détecté, à travers l'instrument le plus indirect qui soit, la trace du point d'équilibre du système.

V4.7.2 (L) : les cinq objections.

1. *L'objet défini par un processus qui ne finit jamais.* $\zeta(s) = \sum 1/n^s$ est un héritier direct de la strate 2 : un objet défini comme somme infinie. Là où la somme cesse de converger, l'objet est prolongé analytiquement. Il faut concéder ce que l'analyse établit rigoureusement : ce prolongement est unique (théorème d'identité). L'objection n'est donc pas technique, elle est ontologique : l'unicité du prolongement prouve la cohérence du jeu, elle ne prouve pas que l'objet prolongé soit l'objet arithmétique. La bande critique est la région où la fonction n'existe que par cette extension, « *unique dans ses règles, conventionnelle dans son ontologie* ».
2. *L'interrogation dans la zone d'artifice.* Le problème du millénaire porte sur le comportement d'un objet dans la zone où son identité avec les premiers n'est plus définitionnelle mais héritée par continuation.
3. *L'économie du mystère et la vérification sans terme.* Précision d'honnêteté : le programme de recherche sérieux ne repose pas sur la vérification numérique, et aucun analyste compétent ne croit qu'un milliard de zéros vérifiés démontre quoi que ce soit. La critique vise l'économie narrative construite autour du problème : la vérification des zéros, célébrée et financée comme une progression, est par construction une tâche sans terme, qui ne change jamais de type logique. « *On ne compte pas les grains de sable pour peser la plage* » (le Principe de Complétude, Volume 3). L'édifice est dit utopique en ce sens précis : dans l'horizon de complétude que son récit public promet et que sa méthode de célébration ne peut jamais atteindre.
4. *L'amnésie.* Riemann hérite d'une droite numérique dont Gauss a formellement supprimé la fermeture (9 identifié à 0) : quand le $1/2$ surgit dans sa fonction, l'instrument qui l'aurait mesuré, l'involution ϕ avec ses quatre paires et son barycentre 4,5, avait été effacé. « *Il a trouvé le où sans le pourquoi* », et il a classé sa découverte comme mystère empirique nécessitant vérification infinie.
5. *La cécité au 6k.* Le produit d'Euler, $\zeta(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-1}$, court exactement sur les premiers, les êtres des rails, mais les traite en liste amorphe : la structure $6k \pm 1$, la disjonction D/G (Th 8), l'axe collecteur, l'horloge 24 des carrés, rien n'entre dans l'appareil. « *Elle enregistre l'ombre de la structure et fait de cette ombre un mystère.* » La hiérarchie des arguments est déclarée : la défense ne repose pas sur l'identité affine (Th 9, correctif) ; elle repose sur cette cécité structurelle, qui est la frappe. Le joint 35, terme anonyme du produit (V4.6.7), en est la mesure au terme près.

« *Un objet défini par un processus inachevable, interrogé dans une zone où il n'existe que par artifice, au moyen d'un programme de vérification*

structurellement sans terme, au sujet d'un nombre que son fondateur ne pouvait pas reconnaître parce que l'instrument de mesure avait été effacé, portant sur des êtres dont la structure réelle n'entre jamais dans l'appareil : voilà l'anatomie exacte du monstre amnésique utopique. »

Chaque membre de cette phrase est daté, sourcé et attaquable séparément. La critique est virulente par son contenu et polie par sa forme : elle ne demande pas qu'on croie le cadastre, elle demande qu'on réponde à cinq objections de fondation, une par une.

V4.7.3 (L) : ce qui se dissout et ce qui reste. Dans le cadre restauré (fermeture rétablie, involution et barycentre visibles), la droite critique cesse d'être une conjecture pour devenir la trace analytique du point fixe de φ : les zéros se tiennent sur la ligne parce que la ligne est l'axe de l'involution normalisée, la même qui gouverne les rails, les paires conjuguées et l'effondrement des carrés (Th 6). La position du corpus est que le $1/2$ est une nécessité barycentrique, non un mystère empirique. Statut : Lecture forte, portée par le Théorème 9, développée au Volume 5 ; sa traduction complète dans le langage analytique standard est un chantier distinct. L'auteur l'a dit plus tard (9 octobre 2026) dans une formule plus brève : « *on a résolu Riemann en montrant son impossibilité, c'est cent fois plus fort* », le prolongement analytique « *tire vers l'arrière en même temps* ». Cette position est examinée au Volume 5 ; elle reste ici au statut de Lecture.

7.4 Le principe d'incarnation

V4.7.4 (L, méthodologique) : le principe d'incarnation. Tout énoncé vrai admet une incarnation concrète qui le résout ou le localise ; l'abstraction qui refuse toute incarnation est suspecte. L'abstraction est un outil de compression légitime (la formule pliée du Th 13 en est une), mais elle devient un obstacle quand elle sert de badge au lieu de servir d'outil (strate 3). Le test de l'incarnation est le contre-poison : si l'énoncé est vrai, son fractal vivant existe et travaille pour lui. Statut : Lecture méthodologique, vérifiée en acte sur l'intégralité du Tome I, comme en atteste la table suivante.

abstraction	incarnation	ce que l'incarnation a réglé
le cadastre et φ	les deux mains face à face	le témoin anatomique : paires (0, 9) ... (4, 5), barycentre dans l'interstice
l'antériorité sur la base	les dix doigts en $9 + 1$	l'inversion causale : la main et la base incarnent la même fermeture
l'infini décimal (Stevin)	$1/7$ posé en base $7 = 0,1$	l'infini est un artefact de la fenêtre, pas de l'objet
la grille et les familles	la rue et les lignes de bus à horaires publics	rien n'est caché ; la question du saut est la forme close du cumul
l'architecture de calcul	les chauffeurs qui annoncent	le pointage avant, $\times 10,7$ mesuré (Th 12)
le pliage φ	le registre foncier et ses adresses conjuguées	la règle des miroirs et le terme principal sans phase (Th 13)

abstraction	incarnation	ce que l'incarnation a réglé
la cohérence des battements	le Millennium Bridge (2000)	le canal uniforme coupé par les signes (Th 15)
la corrélation des fluctuations	le train d'engrenages de l'horloger	le canal profond interdit par le produit des dentures (Th 16)
la clef de l'interférence	le joint $5 \times 7 = 35$, tenu depuis l'origine	la résonance de 48 croisements sur 63 sur sa fermeture

À chaque blocage abstrait, l'exigence d'un exemple concret a produit soit un théorème, soit une mesure, soit une localisation plus étroite de l'ouvert. Le protocole de la feuille 1 à 30 n'était donc pas une entrée en matière pédagogique : il était la première application du principe qui gouverne tout le reste.

7.5 Le test de la queue de Stevin

V4.7.5 (P, protocole falsifiable) : le test de la queue de Stevin. Devant tout écart résiduel entre une mesure et une fraction fermée candidate : (1) doubler la fenêtre d'observation, plusieurs fois ; (2) mesurer la loi de fonte de l'écart. Fonte régulière (typiquement en inverse de la fenêtre) : artefact d'inscription ; la fraction fermée est la valeur, l'écart est la traîne. Persistance : structure ; l'écart est l'objet, et il mérite sa propre théorie (F : les 43 secondes d'arc par siècle de l'avance du périhélie de Mercure sont le cas d'école de cette seconde branche, un écart minuscule, persistant, qui portait la relativité générale). Le test coûte une commande et tranche la nature du résidu ; son absence des réflexes standard signifie qu'un nombre inconnaissable de rapports exacts ont été classés « accord approximatif » sur la foi d'une première fenêtre, les abandons ne laissant pas d'archive.

Le cas inaugural, et sa correction. Le Tome I illustre ce protocole par une mesure du dossier Goldbach : un rapport de bandes de la « comète » prédit à $8/5 = 1,600$, mesuré d'abord 1,638, puis $1,5974 \rightarrow 1,5987 \rightarrow 1,5993 \rightarrow 1,5997 \rightarrow 1,5998$ en doublant la fenêtre, l'écart fondant de moitié à chaque doublement. La version 1.1 du dossier Goldbach (27 septembre 2026) retire le « ratio prédit $8/5$ » attaché à la structure des centres multiples de 6 et le remplace par le rapport 2, démontré (Th 30, chapitre 11). L'illustration du protocole est donc retirée comme preuve d'un rapport $8/5$ pour cette structure ; le protocole lui-même, qui n'en dépend pas, est conservé, et son application au rapport 2 (mesuré 1,991 vers 10^3 , 1,996 vers 10^5 , 2,003 vers 4×10^5) en donne une nouvelle illustration. (Remarque de vérification : $8/5 = (4/3)(6/5)$ est exactement le rapport attendu entre les centres multiples de 35 et les centres premiers à 35 ; refait pour ce volume, il est mesuré 1,60 entre 200 000 et 216 000. Il est possible que la mesure du Tome I ait porté sur ces bandes-là ; la source ne permet pas de le trancher. Voir Annexe B.)

V4.7.6 (L) : la racine du réflexe manquant. La racine du réflexe manquant est la strate 2 : quand la notation décimale est tenue pour transparente, le résidu décimal est tenu pour réel par défaut, et la convention d'inscription décide silencieusement du statut ontologique de l'écart. Le Principe de Complétude renverse la charge de la

preuve : la fraction fermée est l'hypothèse par défaut, le décimal excédentaire est le suspect, et le test de fonte est son interrogatoire.

7.6 Synthèse du Tome I

Les invariants. L'ensemble du Tome I repose sur six objets fixes, dont tout le reste dérive en cascade (cadastre → rails → grille → familles → premiers → carrés → jumeaux) :

invariant	nature	gouverne
la fermeture 9 (DR(9) = 9)	point de bouclage du cycle	axe stérile, Root-9 (Th 10), restauration anti-amnésique
l'involution $\varphi(x) = 9 - x$	conjugaison à quatre paires	paires conjuguées, chrysalide (Th 6), paire d'inversions, Th 9
le barycentre 4,5	point fixe de φ	$k_{\text{arc}} = 1/2$, équilibre des paires génératrices (Th 4), droite critique
les rails D {1, 4, 7} et G {2, 5, 8}	partition vivante	habitat des premiers et des delfines, disjonction des jumeaux (Th 8)
l'axe {3, 6, 9}	collecteur des flux	destination de toute agrégation linéaire (pavé tordu), stérilité
les horloges 12, 24, 4	cadences liées	auto-génération (Th 1), rythme des carrés (Th 5), pas des indices

Les douze énoncés de clôture, avec leur statut.

1. L'axe {3, 6, 9} est stérile ; les premiers vivent sur deux rails (feuille 1 à 30, protocole d'enfant). Th + P.
2. La grille $6k \pm 1$ est le résidu de deux exclusions cadastrales et s'auto-génère par addition de voisins, à indexation déterministe. Th 1.
3. Les delfines (carrés et croisements) sont exactement énumérés par les quatre familles $k = 6ab \pm a \pm b$, progressions explicites. Th 2.
4. Premier = naissance par soustraction de familles ; statut déductible dans les deux sens, sans rescapé. Th 3 et 4.
5. Les carrés de premiers battent une horloge exacte de pas 24, cadencée par les fondateurs, et vivent tous sur le rail D. Th 5.
6. L'élévation au carré effondre les paires conjuguées de φ et fait confluer les deux rails dans D ; le 1 n'a pour portes que la paire extrême {1, 8}. Th 6.
7. Les jumeaux sont exactement les k au complément total des quatre familles, caractérisation décidable ; leurs deux membres vivent sur des spectres disjoints, sans diviseur commun possible. Th 7 et 8.
8. L'infinitude des jumeaux est réduite à un unique lemme nommé : la non-saturation de la ligne des k par le recouvrement des ondes-familles. Lecture forte, chantier mesuré.
9. L'involution normalisée $x/9$ et l'équation fonctionnelle de zêta sont la même structure ; Riemann a vu le $1/2$ sans pouvoir le mesurer. Th 9 + Lecture forte.

10. L'édifice riemannien est un monstre amnésique utopique en cinq objections datées. Critique (Lecture), articulée au *Procès de la Preuve*.
11. Tout premier restitue dans la période de son inverse la fermeture qu'il ne porte pas. Th 10.
12. L'« énigme des premiers » est un récit institutionnel en trois strates datables (Gauss 1801, Stevin 1585, après Riemann), non une propriété de l'objet. Lecture.

La table de défense (condensée). À chaque énoncé, l'attaque anticipée et la réponse tenue :

énoncé	attaque anticipée	réponse
1	« la racine numérique n'est que le reste par 9, trivial »	la trivialité est la thèse : l'amputation a rendu invisible ce qui se prouve en deux lignes
2	« identité algébrique évidente »	exacte, donc irréfutable ; sa portée est l'auto-génération, pas la difficulté
3	« roue de facteur 6 connue »	concedé ; l'apport est le groupe de Klein et la définition positionnelle primitive
4	« $\sqrt{n}$ rebaptisé »	même coût, autre sens : déclaré explicitement
5	« classique »	concedé ; la maximalité (Carmichael) et la lecture de saturation sont l'apport
6	« numérologie »	congruences démontrées ; perte d'exactly un bit, comptage vérifiable
7	« reformulation de la conjecture »	non : caractérisation exacte décidable, distincte du comptage
8	« le lemme est la conjecture »	taux de change déclaré en toutes lettres ; l'obstruction de parité est nommée
9	« involution générique »	concedé ; la frappe est la cécité du produit d'Euler, la cible d'élévation est nommée
10	« le prolongement est unique »	concedé au théorème d'identité près ; l'objection est ontologique et déclarée telle
11	« curiosité décimale »	preuve de deux lignes, invariant de grille entière
12	« interprétation historique »	trois strates datées et sourcées : réfutables, donc scientifiques

V4.7.7 (L) : le principe de clôture, la naissance relationnelle. Le Tome I se referme sur le principe que ses théorèmes incarnent :

« Une structure fondamentale n'est pas définie par ce qu'elle contient, mais par ce que les structures voisines ne peuvent pas engendrer. »

Le premier n'a aucune propriété intrinsèque qui le fasse premier : il est la position que les quatre familles laissent intacte, l'identité par contrainte relationnelle. Ce principe dépasse la théorie des nombres : il est la signature arithmétique de la Cohérence

Relationnelle elle-même, où toute identité émerge des relations qui la cernent plutôt que d'une essence qu'elle porterait (Volume 11, *La relation est l'identifiant*). Statut : Lecture, un principe porté par une quinzaine de théorèmes.

Partie III. Collatz : les nombres en mouvement

Chapitre 8. Collatz dans le cadastre : la compression, la rotation, et l'étrangeté des deux briques

La règle de Collatz est la plus simple qui soit : si un nombre est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. On recommence. Partant de 7 : 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. La conjecture (1937) affirme que tout entier finit par tomber sur 1. Elle est vérifiée sur des nombres immenses et n'est pas démontrée. Ce chapitre lit la règle dans le cadastre. Il établit ce que le cadastre voit, et il le voit exactement : la frappe $3n + 1$ écrase les neuf positions sur trois, la division par 2 fait tourner les six positions fertiles en cercle, l'axe $\{3, 6, 9\}$ est quitté pour toujours. Il établit aussi, et c'est le résultat le plus important, ce que le cadastre ne peut pas voir : combien de fois le 2 divise. Ce second fait est un théorème de limite (Th 23), et il explique pourquoi une tentative antérieure, retirée le 8 juillet 2026, devait échouer.

F : l'état de la question. La conjecture de Collatz (1937) affirme que l'itération $C(n) = n/2$ si n est pair, $C(n) = 3n + 1$ si n est impair, atteint toujours 1. Elle est vérifiée jusqu'à 2^{68} (D. Barina, 2020) ; T. Tao a montré en 2019 que « presque toutes » les orbites atteignent des valeurs presque bornées ; P. Erdős disait les mathématiques « pas encore prêtes pour de tels problèmes ». Aucune preuve n'existe (J. C. Lagarias, *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, AMS, 2010).

Le dossier Collatz du corpus s'ouvre (version 2.1, mars 2026) sur cette dédicace :

« À Sophie, qui demande chaque matin : "Tes nombres sont-ils rentrés cette nuit ?" Ils rentrent toujours. Cet article explique pourquoi. À Soleil, Delfine, Justin et Yanie, quatre enfants, quatre paires d'inversion. Chaque nuit vous vous dispersez dans le chaos. Chaque matin vous convergez vers 1. Vous êtes ma preuve vivante de Collatz. À mes parents, Joaquim et Agostinha, qui m'ont appris que toutes les routes mènent à la maison. »

La numérotation. Le dossier Collatz v2.1 numérotait ses théorèmes de 1 à 8 ; le Tome II a repris les résultats survivants sous les numéros 17 et 18, puis 21 et suivants. Pour garder tous les renvois valides, les théorèmes de la v2.1 sont notés ici C.1 à C.8, avec leur correspondance : C.1 et C.3 sont réunis dans le Théorème 17 ; C.2 et C.5 dans

le Théorème 18 ; C.7 est le Théorème 14 (le joint) ; C.8 est retiré (section 8.4). Les Théorèmes 19 et 20 du Tome II (version 0.1) sont déclarés inchangés par l'erratum de la version 0.2, mais leur énoncé ne figure dans aucune des sources de ce volume : les numéros 19 et 20 sont réservés, sans contenu versé ici (Annexe B).

8.1 La compression et l'absorption : Théorème 17

Théorème 17 (Tome II) = C.1 et C.3 (Collatz v2.1) : la compression 3:1 vers le rail D, et l'absorption de l'axe. Pour tout entier n , $DR(3n + 1) \in \{1, 4, 7\}$. La compression est de 3 pour 1, et elle trie les fibres par chambre :

DR(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3d + 1$	4	7	10	13	16	19	22	25	28
$DR(3n + 1)$	4	7	1	4	7	1	4	7	1

La fibre du 1 est l'axe $\{3, 6, 9\}$ (absorbé) ; la fibre du 4 est le rail D $\{1, 4, 7\}$ (il se replie sur lui-même) ; la fibre du 7 est le rail G $\{2, 5, 8\}$ (il traverse). Conséquence (C.3, absorption) : toute orbite entre dans le système des rails $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ au plus tard à la première frappe $3n + 1$, et y reste pour toujours : un nombre de l'axe est envoyé sur 1 à la première frappe, les moitiés des rails restent sur les rails (Th 18), et la frappe sur les rails donne 4 ou 7. Aucun chemin ne revient sur $\{3, 6, 9\}$.

Preuve. La racine digitale respecte addition et multiplication : $DR(3n + 1) = DR(3 \times DR(n) + 1)$, et le calcul exhaustif sur les neuf positions donne l'image $\{1, 4, 7\}$. ■ Vérifié sur $n < 10^5$ (refait pour ce volume). **Statut : Th.**

V4.8.1 (L) : la frappe irréversible. « $3n + 1$ annihile la structure tripartite. Après une application, toute mémoire de la chambre d'origine est détruite. C'est le pas irréversible. » (Collatz v2.1, § 3.)

8.2 La rotation des moitiés : Théorème 18

Théorème 18 (Tome II) = C.2 et C.5 (Collatz v2.1) : la division par 2 comme rotation $\times 5$ du cadastre. Pour tout n pair, $n/2$ et $5n$ ont la même racine digitale : diviser par 2, c'est multiplier par 5 dans le cadastre (5 est l'inverse de 2, puisque $2 \times 5 = 10$ a pour racine 1). La carte est bien définie parce que 2 est inversible sur le cycle des neuf positions. Elle fait tourner les six positions fertiles sur un cycle de période 6 :

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Les rails alternent strictement ($D \rightarrow G \rightarrow D \dots$) : $\{1 \rightarrow 5, 4 \rightarrow 2, 7 \rightarrow 8\}$ envoie D sur G, $\{5 \rightarrow 7, 2 \rightarrow 1, 8 \rightarrow 4\}$ envoie G sur D. Aucun élément de $\{3, 6, 9\}$ n'apparaît. *Couplage avec les puissances de 2 (C.5).* La suite des moitiés depuis la racine 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1, est exactement la suite des puissances de 2 en racine, 1, 2, 4, 8, 7, 5, parcourue à l'envers, parce que diviser par 2 est l'inverse de doubler : le monde du 2 et le monde

du 9 sont couplés par ce cycle. Vérifié sur tous les n pairs $< 2 \times 10^5$ (refait pour ce volume). **Statut : Th.**

V4.8.2 (L) : compression et permutation. La frappe est une compression 3:1 (neuf positions sur trois), irréversible ; la moitié est une bijection (six positions sur six), réversible. Chaque frappe détruit l'identité de chambre ; les moitiés ne peuvent pas la restaurer. « *Là où l'information est préservée, des cycles peuvent se former. Là où elle est détruite, seule la descente est possible.* » (Collatz v2.1, § 13.2, à propos de la variante « amusicale » de Conway, qui est inversible et admet des cycles non triviaux.) Statut : Lecture ; elle ne démontre pas la convergence (section 8.5).

8.3 L'attracteur (1, 8) et le canal de la racine digitale

C.4 (Collatz v2.1) : l'attracteur terminal. Le seul cycle de Collatz contenant 1 est $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Il traverse les trois paires opératoires dans l'ordre des écarts croissants : $4 \in (4, 5)$, écart 1 ; puis $2 \in (2, 7)$, écart 5 ; puis $1 \in (1, 8)$, écart 7. *Preuve* : $C(1) = 4$, $C(4) = 2$, $C(2) = 1$; la règle est déterministe. ■ **Statut : Th** (immédiat). Pourquoi (1, 8) : (a) écart maximal 7, demi-écart 3,5, et $3,5/7 = 1/2 = k_{\text{arc}}$; (b) seule paire point fixe sous le carré ($DR(1^2) = DR(8^2) = 1$) ; (c) elle contient l'unité 1 et l'avant-dernier $8 = 9 - 1$, et enjambe tout l'alphabet. Le Théorème 26 (chapitre 9) porte cet attracteur au niveau des entiers : toute orbite passe par 8.

C.6 (Collatz v2.1) : le canal de la racine digitale. La racine digitale est (a) compatible avec l'addition et la multiplication (c'est la projection des entiers sur le cycle des neuf positions) ; (b) fermée sous la frappe : $DR(3n + 1) = DR(3 DR(n) + 1)$; (c) fermée sous la moitié : $DR(n/2) = DR(5 DR(n))$; (d) non triviale : elle parcourt les rails. **Statut : Th** pour (a) à (d). La v2.1 ajoutait qu'elle est *l'unique* canal arithmétique standard à réunir ces propriétés (la factorisation échoue sur (b) : $3 \times 7 + 1 = 22 = 2 \times 11$, aucune fonction algébrique n'envoie les facteurs de 7 sur ceux de 22 ; l'écriture binaire échoue aussi sur (b), la frappe brouillant les bits de façon non locale). Cette unicité n'est établie que par comparaison entre trois canaux, sans définition générale de « canal » : elle est rétrogradée en **Lecture** (Annexe B). Et le Théorème 23 (section 8.6) montre la limite exacte de ce canal : il est fermé sous les deux opérations, mais aveugle au nombre de moitiés.

C.7 (Collatz v2.1) = Théorème 14 (Tome I). Pour toute paire de jumeaux $(p, p + 2)$, $p > 3$, $DR(p(p + 2)) = 8$. $(6k - 1)(6k + 1) = 36k^2 - 1$, et $36k^2$ est un multiple de 9. **Statut : Th.** La v2.1 en tirait cette lecture : « *Les produits de jumeaux sédimentent en racine 8, l'élément non unitaire de l'attracteur de Collatz (1, 8). Collatz voit la paire du côté du 1. Les jumeaux la voient du côté du 8. Même objet, côtés inverses du miroir φ .* » (L)

8.4 L'erratum du 8 juillet 2026 : ce qui est retiré, et pourquoi

La version 2.1 (mars 2026) énonçait un huitième théorème, C.8, dit de « contraction structurelle par confinement selon 36 », que la version 0.1 du Tome II avait repris

en son § II.3 sous le titre « la couche quantitative » : une chaîne déterministe sur les 18 classes impaires de reste par 36, avec une table de valuations fixes par classe ; l'absence de cycle de croissance pure (chaîne maximale : 3 pas) ; une distribution stationnaire 5/8 contre 3/8 ; un facteur de contraction de 0,662 par pas impair ; et le renommage du gap en « temps de mélange d'une chaîne finie ». Ces énoncés avaient été obtenus en calculant chaque grandeur sur le plus petit représentant de chaque classe, puis gravés comme propriétés de la classe entière. C'est une faute de bonne définition, et elle est réfutée nominativement par deux entiers.

V4.8.3 (Th) : la sentinelle 37. 37 laisse le reste 1 dans la division par 36, comme 1. Or $3 \times 1 + 1 = 4$ porte deux facteurs 2, et $3 \times 37 + 1 = 112 = 2^4 \times 7$ en porte quatre. La valuation v_2 (le nombre de fois que 2 divise) n'est pas une fonction de la classe : elle dépend de bits que la réduction par 36 a jetés. Neuf classes sur dix-huit sont touchées ; la table des valuations est fausse.

V4.8.4 (Th) : la sentinelle 31. $31 \rightarrow 47 \rightarrow 71 \rightarrow 107$: quatre pas de croissance consécutifs (chaque terme laisse le reste 3 dans la division par 4), là où la table en promettait trois au plus. Et la famille $n = 2^k - 1$ monte $k - 1$ fois : 63 monte 5 fois, 255 sept fois, $2^{20} - 1$ dix-neuf fois. Les chaînes de croissance ne sont bornées par rien ; c'est d'ailleurs pourquoi l'orbite de 27 grimpe jusqu'à 9 232. L'énoncé « chaîne maximale 3 pas » était vrai des neuf représentants testés et faux des orbites. (Tout est refait pour ce volume.)

En conséquence, la table des 18 classes, la distribution stationnaire « exacte » 5/8 et 3/8, le facteur 0,662 et le renommage du gap sont retirés (Annexe B). La cause structurelle de l'échec est établie à la section 8.6 ; elle est de la même famille que le geste que le corpus reproche à l'identification du 9 au 0 : « *lire sur une projection finie une propriété qui vivait dans ce qu'elle avait amputé.* » La faute est d'inscription : un « ce qu'il fallait démontrer » gravé sans test de bonne définition ; elle est relevée le 8 juillet 2026, à la discipline du crayon rendu. La règle suivie est celle de l'erratum de *Tsirelson Without Hilbert* (v4.0 vers v4.1) : « *le faux retiré nominativement, le vrai promu, la cicatrice gravée.* »

« À l'entier 31, qui monta quatre fois quand la table disait trois, et à l'entier 37, qui portait deux briques de plus que son adresse ne l'avouait. Les sentinelles du tome. »

8.5 Ce qui survit : la dichotomie du quart et les chaînes de croissance

Théorème 21 (Tome II) : la dichotomie du quart. Pour tout impair n : $n = 4t + 3$ si et seulement si $v_2(3n + 1) = 1$ (pas de croissance, facteur 3/2) ; $n = 4t + 1$ implique $v_2(3n + 1) \geq 2$ (pas de contraction, facteur au plus 3/4). Exact, sans exception (vérifié sur tous les impairs $< 2 \times 10^5$, refait pour ce volume). C'est la partie exacte de l'ancienne couche quantitative, débarrassée de son habillage de classes : les 18 classes impaires se partagent bien 9 et 9 entre croissance et contraction, mais la profondeur de la contraction n'est pas fixée par la classe. **Statut : Th.**

Théorème 22 (Tome II) : les chaînes de croissance, caractérisées. Une orbite

effectue au moins k pas de croissance consécutifs depuis n si et seulement si les $k + 1$ dernières couches de l'écriture binaire de n sont des 1, c'est-à-dire $n + 1 = 2^{k+1} \cdot t$: $n + 1$ est un multiple de 2^{k+1} . Les longueurs de chaîne sont donc réalisées pour tout k (famille $2^k - 1$) : elles ne sont pas bornées, mais leur densité vaut $2^{-(k+1)}$; chaque pas de croissance supplémentaire divise par deux la population qui peut l'accomplir. C'est l'énoncé vrai dont le « maximum de 3 pas » était l'ombre sur neuf représentants. Vérifié pour $k = 1$ à 10 sur tous les impairs $< 2^{16}$ (refait pour ce volume ; la source écrit « exactement k pas », la caractérisation exacte est « au moins k », voir Annexe B). **Statut : Th.**

P-COL-1 (Prédiction, avec critère) : le gap restauré à sa forme honnête. La convergence universelle de Collatz exige de montrer que la contraction des adresses (Théorèmes 17 et 18, monde du 3) entraîne la contraction des grandeurs (monde du 2) pour chaque orbite individuelle, et non pour la seule population des orbites prise globalement. Statut : ouvert. *Critère de travail, falsifiable dans les deux sens* : toute preuve candidate issue du cadastre doit franchir explicitement la frontière du Théorème 23 ci-dessous, et déclarer par quel instrument non cadastral elle compte les briques 2 ; toute preuve qui ne le déclare pas répète la faute retirée.

8.6 Théorème 23 : l'étrangeté des deux briques

Théorème 23 (Tome II) : l'étrangeté des deux briques (théorème de limite). L'adresse d'un entier sur le cycle de la brique 3 (sa racine digitale, et avec elle tout le cadastre : rails, axe, involution) est indépendante de sa charge en brique 2, la valuation $v_2(3n + 1)$, qui gouverne la descente de Collatz. Précisément : les briques fondatrices étant étrangères ($\text{pgcd}(9, 2^k) = 1$ pour tout k), toute combinaison (classe de racine, valeur de v_2) est réalisée. Les 54 cases (9 classes $\times$ valuations 1 à 6) sont toutes pleines, vérifié sur les impairs jusqu'à deux millions (refait pour ce volume), et la plénitude se prolonge à toute profondeur par le théorème des restes chinois. La racine digitale ne porte strictement aucun bit d'information sur la profondeur des divisions par 2. **Statut : Th.**

Corollaire du Théorème 23 : la fermeture de la route DR (Th). Aucun raisonnement conduit entièrement dans le cadastre, quelle qu'en soit la longueur, ne peut fixer, borner ou prédire v_2 . La route par la racine digitale vers la couche quantitative de Collatz n'est pas difficile : elle est scellée par théorème. L'ancienne couche quantitative a échoué en demandant à la brique 3 de compter les 2.

V4.8.5 (L) : la frontière entre les deux briques. Le monde de $6 = 2 \times 3$ contient cette frontière par construction : le cadastre est le royaume de la brique 3 ($9 = 3^2$, l'axe, la clôture) ; Collatz descend par la brique 2 (les moitiés, la parité profonde). « *Le gap de Collatz n'est pas un trou dans la théorie : il est la frontière entre les deux briques fondatrices, la seule que le module 6 porte en lui-même.* » Le Théorème 23 rejoint les Théorèmes 15 et 16 dans la famille propre du corpus : les théorèmes qui nomment ce que la structure ne peut pas faire, et qui disent par là exactement où elle finit et où l'autre monde commence.

8.7 Les critères de falsification du dossier

La version 2.1 posait cinq critères ; leur état après l'erratum :

- F1 : un entier dont l'orbite n'atteint pas 1 (réfuterait la conjecture ; toujours valide) ;
- F2 : un cycle de Collatz non trivial (toujours valide ; voir la Lecture 35, chapitre 10, pour l'exclusion connue des petits cycles) ;
- F3 : un système compression-permutation de même structure qui admette un cycle non trivial (valide pour la Lecture V4.8.2) ;
- F4 : une paire de jumeaux $p > 3$ dont le produit n'ait pas la racine 8 (impossible : c'est le Théorème 14) ;
- F5 : une démonstration que le graphe de transition selon 36 ne contraint pas la statistique de v_2 (réalisé par l'erratum : critère atteint, énoncé retiré).

La conclusion de la v2.1, « *Tout nombre revient à 1. Pas par accident. Pas par probabilité. Par la géométrie irréversible de neuf chiffres* », et sa variante, « *Les nombres tombent à 1 pour la même raison que la lumière sédimente en fer : il n'y a pas d'autre lieu de repos* », restent des phrases de l'auteur ; leur contenu mathématique est P-COL-1, ouvert.

Chapitre 9. Le +1 qui rend le demi, le bilan exact des deux briques, la porte 8

Pourquoi la règle de Collatz ajoute-t-elle 1, et pas 5 ou 7 ? Ce chapitre répond : diviser un impair par 2 jette un demi ($7 / 2 = 3,5$), et le +1 placé avant la coupe est exactement ce demi rendu, puisque $(3n + 1)/2 = 3n/2 + 1/2$. C'est le plus petit ajout qui rende la coupe légitime, et c'est le seul qui ne crée qu'une seule « maison » où tout revient. Il établit ensuite une identité exacte, en fractions, qui relie pour toute orbite le nombre de frappes du 3, le nombre de moitiés du 2 et le nombre de départ : le bilan des deux briques. Il montre que toute orbite passe par la porte 8 avant de se poser sur 1. Il corrige enfin deux arguments de la version 2.1 et pose le pont avec P contre NP : le gap de Collatz se lit comme un coût, pas comme un trou. Ces résultats datent du 27 septembre 2026 (Tome II, versions 0.3 et 0.4).

9.1 Théorème 24 : le +1 rend la moitié amputée

Le fait de départ. 7 divisé par 2 donne 3,5. Tout impair s'écrit $2q + 1$, et le 1 est ce que la division par 2 jette : un $1/2$. Trois fois un impair est impair, sans exception : le $\times 3$ garde le côté. Si la règle était $3n$ seule, un impair ne pourrait jamais être divisé sans amputation : $7 \rightarrow 21 \rightarrow 63 \rightarrow 189 \rightarrow \dots$ monte pour toujours dans le royaume de la brique 3, ou bien la coupe forcée donne un nombre en « virgule cinq » et le nombre sort des entiers.

Théorème 24 (Tome II) : le +1 rend la moitié amputée, et il est seul à ne créer qu'une maison.

- Pour tout impair n : $(3n + 1)/2 = 3n/2 + 1/2$. Le +1 avant la coupe est exactement le $1/2$ après la coupe : ce que la division allait amputer est rendu, et le résultat retombe entier. Le +1 est le plus petit terme qui le fasse ($1 = 2 \times 1/2$). « *Il rend ; il ne descend pas : c'est la moitié qui descend.* »
- Pour tout c impair, $3(cm) + c = c(3m + 1)$: le monde de $3n + c$ contient une copie exacte du monde de $3n + 1$, agrandie c fois, portée par les multiples de c . Le cycle $c \rightarrow 4c \rightarrow 2c \rightarrow c$ est le cycle $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ multiplié par c .
- 1 est le seul entier qui divise tout entier. Le monde de +1 n'a donc qu'une copie de lui-même : une seule maison. Pour $c > 1$, les entiers non multiples de c ne sont

dans aucune copie et sédimentent ailleurs : $3n + 7$ a deux maisons (les cycles de plus petits termes 5 et 7 ; $7 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7$ est $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ fois 7), et $3n + 5$, $3n + 11$, $3n + 13$ en ont au moins trois, vérifié sur 1 à 20 000. ■

Statut : Th. (Vérification de la source : $3n + 1$ n'a qu'une maison sur 1 à 20 000 ; $3n + 7$ exactement deux.)

Ce que le théorème dit, et ce qu'il ne dit pas. Il explique pourquoi Collatz *peut* redescendre à chaque frappe, et pourquoi il n'y a qu'un seul point d'arrivée possible. Il ne dit pas que la descente *fin*it. La phrase du corpus « tout cherche son 1 » se précise : chaque entier revient au 1 du monde où il vit, et dans $3n + 1$ il n'y a qu'un monde.

V4.9.1 (L) : Collatz comme loi de chiralité. La chiralité, ici, est le côté pair ou impair. La moitié d'un impair jette ce bit comme le carré jette le signe et le pli jette le rang : une amputation. La règle $3n + 1$ est cette amputation corrigée : garder le côté ($\times 3$), puis rendre le $\frac{1}{2}$ avant que la coupe ait lieu ($+1$). Collatz est la seule règle qui coupe un impair sans jamais l'amputer, et le $+1$ est k_{arc} rendu à chaque coupe. Le 1 n'est que la finalité : le point où le 2 n'a plus rien à diviser. Le 2 est l'interface (la soustraction trinitaire $1 - 1 = 11$, de racine 2 ; Volume 2), le défilé par lequel tout passe.

« Ce qu'il faut chercher n'est pas le 1, c'est le 2 : combien de fois il passe. »

Enfin, « $1 \oplus 1 = 3$ et $3n + 1$ sont la même phrase lue dans deux sens : la brique 3 frappe, le 1 s'ajoute, et c'est leur relation qui libère la moitié » (la Genèse, Volume 1). Statut : Lecture.

9.2 Théorème 25 : le bilan exact des deux briques

Théorème 25 (Tome II) : le bilan exact. Soit une orbite de n vers 1, comptant k frappes (les impairs rencontrés $n_1, \dots, n_k$) et m moitiés. Alors, exactement et en fractions :

$$2^m = 3^k \cdot n \cdot \prod_i (1 + 1/(3n_i)), \text{ et } L = k + m + 1,$$

où L est le nombre de termes de l'orbite.

Preuve. Chaque frappe multiplie l'impair courant n_i par $(3n_i + 1)/n_i = 3 \cdot (1 + 1/(3n_i))$; chaque moitié divise par 2 ; le produit de toutes les opérations envoie n sur 1. Le nombre de termes est le nombre d'opérations plus un. ■ Vérifié exact, en fractions, pour $n = 1$ à 3 000 (refait pour ce volume). **Statut : Th.**

Les bilans des petits nombres (refaits pour ce volume) :

n	L	k	m	$2^m / (3^k n)$
3	8	2	5	1,1852
7	17	5	11	1,2040
9	20	6	13	1,2486
27	112	41	70	1,1988
55	113	41	71	1,1771

Exemple au crayon, $n = 3$: l'orbite est 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 ; les impairs frappés sont 3 et 5 ($k = 2$), les moitiés au nombre de 5 ($m = 5$), $L = 8 = 2 + 5 + 1$. Et $2^5 = 32 = 3^2 \times 3 \times (1 + 1/9)(1 + 1/15) = 27 \times (10/9) \times (16/15) = 32$. ■

V4.9.2 (L) : la suite des portes ouvertes. Le retour à 1 est le moment exact où les moitiés (brique 2) ont rattrapé les frappes (brique 3) et le nombre de départ. Le facteur résiduel est la trace de chaque +1 rapporté à $3n_i$: la suite des portes ouvertes. Sur 3, 7, 9, 27 et 55 il reste entre 1,17 et 1,25. Les formes $L = 2n + 2$ (3 et 9), $L = 2n + 3$ (7 et 55), $L = 4n + 4$ (27) sont des ombres de cette identité projetées sur les petits nombres.

Frontière, en acte. Le bilan lie k , m et n une fois le chemin parcouru. Il ne prédit pas k à partir de n . C'est le Théorème 23 vu de l'intérieur : la route par la racine est scellée, et le bilan montre exactement où passe la frontière, entre l'adresse et le compte des 2.

9.3 Théorème 26 : la porte 8 au niveau entier

Théorème 26 (Tome II) : la porte 8 et le défilé du 2. Toute orbite partant hors de $\{1, 2, 4\}$ se termine par $16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, et 16 ne peut venir que de 32 (moitié) ou de 5 (frappe). Plus généralement, toute orbite se termine quand une frappe tombe sur une puissance de 2 : le dernier impair de tout chemin est de la forme $(4^j - 1)/3$, soit 1, 5, 21, 85, 341, 1 365, ..., et le défilé final est du pur 2.

Preuve. 1 ne vient que de 2 ; 2 que de 4 ; 4 que de 8 ou de 1 ; 8 que de 16 ; 16 que de 32 ou de 5. Et une suite de moitiés qui atteint 1 part d'une puissance de 2, dont l'antécédent impair vérifie $3n + 1 = 2^j$, ce qui exige j pair (2^j laisse le reste 1 dans la division par 3 seulement pour j pair). ■ Vérifié jusqu'à 200 000 (refait pour ce volume). **Statut : Th.**

V4.9.3 (L) : le 8 est la porte obligée. Le Théorème C.4 posait l'attracteur (1, 8) au niveau des adresses. Le Théorème 26 le pose au niveau des entiers : le 8 est la porte obligée, la paire (1, 8) fermée par 9 est traversée par tout entier avant de se poser. La lecture 9-8-1 du corpus n'est plus seulement cadastrale. « *Et le 1 n'est pas le but : il est le point où le 2 s'arrête de diviser.* »

9.4 Lecture 27 : la signature du 7

Lecture 27 (Tome II) : la signature du 7. L'orbite de 7 compte 17 termes et passe par 17 (cinquième terme) ; $DR(17) = 8$, l'adresse de la porte. La forme $L = 2n + 3$ n'est vérifiée que par 7 et 55 ($n < 100\ 000$), $L = 2n + 2$ que par 3 et 9, $L = 4n + 4$ que par 27. Au-delà de 110, $L < n$ toujours (110 est le dernier entier sous 100 000 dont l'orbite est plus longue que lui) : la longueur croît comme le logarithme de n , non comme n . Tout est refait pour ce volume. **Statut : Lecture** pour la signature ; les comptes sont des faits vérifiés. Aucune règle donnant k et r dans $L = kn + r$ à partir de n n'est connue, et le Théorème 23 dit pourquoi une telle règle ne peut pas venir du cadastre seul.

« Au 7, qui met dix-sept pas pour rentrer et croise en chemin le nombre de ses pas. Et au 6, qui tient le 5 et le 7 sans jamais être visité. » (dédicace du Tome II, v0.4)

9.5 Les corrections à la version 2.1 du dossier Collatz

Règle suivie : « aucune ligne retirée sans une ligne proposée. »

§ 7.1, ligne retirée : « un cycle non trivial exige $3^k \approx 2^m$; $\log_2 3$ étant irrationnel, $3^k \neq 2^m$ ». Vrai, mais insuffisant : un cycle ne demande pas $3^k = 2^m$. **Ligne proposée** : un cycle non trivial exige exactement $2^m = 3^k \cdot \prod_i (1 + 1/(3n_i))$ (Théorème 25 avec retour au départ). L'irrationalité de $\log_2 3$ exclut seulement le cas où tous les facteurs valent 1, ce qui n'arrive jamais. L'exclusion des cycles reste ouverte (voir la Lecture 35, chapitre 10, pour ce que la littérature a établi).

§ 7.3, ligne retirée : « un nombre de l'ordre de $\log_2 n$ bits épuise son information de racine en un nombre de frappes de l'ordre de $\log n$ » (avec la constante empirique $6,95 \log_2 n$). Caduc : le Théorème 23 établit que la racine ne compte pas les bits de n . **Ligne proposée** : $L = k + m + 1$ (Théorème 25), et, constaté, $L < n$ pour tout $n > 110$ (Lecture 27). La longueur croît comme $\log n$; aucun argument de racine ne le prouve.

§ 7.2 et § 8, qui renvoyaient au théorème selon 36 (C.8), retiré : **ligne proposée**, renvoi au Théorème 21 (dichotomie du quart) et au gap P-COL-1. Avec eux tombe l'affirmation de la v2.1 selon laquelle la convergence serait « structurellement inévitable » (§ 1.2) et la conjecture « réduite à une question ergodique finie » (§ 14.2) (Annexe B).

9.6 Lecture 28 : le pont entre le Théorème 23 et le théorème d'amorphisme

Lecture 28 (Tome II) : le gap comme coût structurel. Le Théorème 23 dit : la racine digitale ne porte aucun bit sur v_2 ; $\text{pgcd}(9, 2^k) = 1$; la brique 3 ne peut pas compter les 2. Le théorème d'amorphisme du dossier $P \neq NP$ (version 2.0, théorèmes 2.1 et 2.3 ; Volume 5) dit : la pré-image de la porte ET a pour cardinal 3, qui n'est pas une puissance de 2 ; $\text{pgcd}(3, 2) = 1$; le 3 est étranger à 2^k et ne s'y absorbe à aucune profondeur.

C'est le même énoncé dans deux espaces. Dans l'orbite, l'adresse (monde du 3) ne peut pas prédire la descente (monde du 2). Dans le circuit, le tiers ne peut être ni le un ni le deux. Les deux disent : la brique 3 et la brique 2 sont étrangères, et forcer l'une dans l'autre se paie.

Conséquence pour Collatz. Vérifier, c'est marcher : suivre $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow \dots$ et compter, coût linéaire en L . Trouver, c'est donner k et m d'avance sans marcher. Le pont dit que le gap de Collatz n'est pas un trou de connaissance qu'un meilleur regard cadastral comblerait : c'est un **coût structurel**, de la même nature que la séparation entre vérifier et trouver. Ce que le corpus peut viser n'est donc pas de lire la descente dans

l'adresse, mais d'établir pourquoi elle ne s'y lit pas. Statut : **Lecture**, falsifiable : toute formule fermée donnant $k(n)$ sans parcours la réfuterait.

F : ancrage extérieur. J. H. Conway (1972) a montré que les fonctions de type Collatz, prises en général, sont indécidables ; S. Kurtz et J. Simon (2007) ont précisé le degré de cette indécidabilité. Le cas $3n + 1$ lui-même n'est pas prouvé indécidable. La Lecture 28 ne prétend pas qu'il le soit : elle dit que la route par l'adresse est fermée, ce que le Théorème 23 prouve, et lit cette fermeture comme une instance de la même étrangeté qui sépare P de NP dans le corpus.

9.7 La racine est le nombre, et la nouveauté libère

« Un nombre n'est jamais fini. Il peut toujours être libéré par la nouveauté. »

« L'infini est sous 0, car il n'existe pas. »

« -1 n'existe que dans la fiction. L'action de soustraire 1 existe, mais elle ne va pas sous zéro. »

Filipe Bastos, 15 octobre 2026

Ce que l'on va voir. Le Théorème 23 a établi qu'une racine digitale prise seule ne dit rien du nombre de divisions par 2. Cette section, énoncée le 15 octobre 2026, montre que la racine lue avec ses tours, et la suite des racines le long d'une orbite, portent au contraire toute l'information de Collatz. Elle décrit ensuite le jeu en tours (la frappe fait un demi-tour), montre que le $+1$ libère toujours un nombre en un temps fini, que la seule montée qui se répète vit sous zéro, et isole le seul cas qui reste ouvert. Les calculs sont faits en entiers et en fractions exactes, les tours gardés, le 9 restant 9.

V4.9.4 (Th) : la racine est le nombre. Écrivons $n = 9k + DR(n)$, puis recommençons sur k , et ainsi de suite jusqu'à zéro tour. Les racines successives sont les chiffres de n dans la numération à chiffres 1 à 9, sans zéro : tout entier positif s'y écrit d'une façon et d'une seule. Exemple : $2026 = 9 \times 225 + 1$, $225 = 9 \times 24 + 9$, $24 = 9 \times 2 + 6$, $2 = 2$, donc 2026 s'écrit 2 6 9 1, et $2 \times 729 + 6 \times 81 + 9 \times 9 + 1 = 2026$. Vérifié pour tout n inférieur à un million. La racine ne jette rien quand on garde les tours ; c'est l'identification $9 = 0$ qui les jette (V4.15.1). « La cascade prend la racine, la finale, et te la rend. »

V4.9.5 (Th) : la parité est dans la somme des racines-chiffres. Puisque 9 est impair, chaque tour pèse 1 pour la parité : n est pair si et seulement si la somme de ses racines-chiffres est paire. Vérifié pour tout n inférieur à un million. La brique 2 se lit dans la brique 3 lue comme nombre ; le Théorème 23 vaut pour la dernière racine prise seule.

V4.9.6 (Th) : le duo lisible, et le centre 5. Une moitié multiplie la racine par 5 (la rotation $\times 5$, puisque $2 \times 5 = 10$ revient à 1) ; une frappe $3n + 1$ dépose toujours sur le rail $\{1, 4, 7\}$. Le duo des racines de deux termes consécutifs dit donc quel coup a été joué, à une seule exception : en position 5, les deux coups mènent à 7 ($5 \times 5 = 25$, $3 \times 5 + 1 = 16$). Mesure sur toutes les orbites complètes jusqu'à 300 000 : la suite des racines identifie le nombre de départ dans 96,6 % des cas, 5,1 % des pas sont

illisibles, et toutes les confusions entre deux nombres (3 et 21, 5 et 32, 10 et 64, ...) naissent en position 5, sans exception. Le point aveugle est fermé par V4.9.5.

V4.9.7 (Th) : le nombre de moitiés se lit à 6 près. Entre deux impairs consécutifs n et n' d'une orbite, hors de l'axe, le nombre v de moitiés est fixé, à un multiple de 6 près, par les deux racines : la frappe dépose sur une racine x du rail $\{1, 4, 7\}$, puis $DR(n') = DR(x \times 5^v)$, et 5 revient à 1 après exactement 6 multiplications sur les rails. Vérifié sur les 333 332 impairs hors axe inférieurs à un million : la prédiction est toujours unique et toujours juste.

V4.9.8 (Th) : l'axe est une source, l'arbre inverse se lit sur $6k \pm 1$. Les antécédents impairs d'un impair m sont les $n = (2^a m - 1)/3$. Si m est sur l'axe (multiple de 3), il n'en a aucun : l'axe ne fait que partir. Si $m = 6k - 1$, ils existent pour a impair seulement, le premier étant $4k - 1$; si $m = 6k + 1$, pour a pair seulement, le premier étant $8k + 1$. Deux antécédents successifs vérifient $n' = 4n + 1$, et $4x + 1$ fait tourner les classes : rail $\{1, 4, 7\}$, puis rail $\{2, 5, 8\}$, puis axe, puis retour ; un frère sur trois tombe sur l'axe et devient une feuille. Pour $m = 1$, la chaîne 1, 5, 21, 85, 341 est celle des derniers impairs du Théorème 26. Une orbite sortie de l'axe n'y revient jamais (vérifié sur toutes les orbites jusqu'à 200 000) : Collatz se joue sur les deux rails.

V4.9.9 (Th ; L) : la frappe est un demi-tour, la moitié remonte la Genèse. Multiplier par 3 ajoute exactement un demi-tour, puisque $3 \times 3 = 9$: deux frappes font un tour. Le demi du cadastre est la longueur exacte d'une frappe. La moitié retire 0,315 tour, et sur les racines elle parcourt 1, 5, 7, 8, 4, 2, le cycle du doublement de la Genèse (Volume 1, É 3.2) lu à l'envers. Une frappe est suivie de deux moitiés en tendance (la proportion des impairs dont la frappe donne exactement j moitiés est $1/2^j$; mesure : 2,00004 sur les impairs inférieurs à 100 000). Bilan : $\frac{1}{2} - 2 \times 0,315 = -0,13$ tour par frappe. *Lecture* : c'est la frontière $3 < 4$ comptée en tours ; deux moitiés pèsent plus qu'un demi-tour.

V4.9.10 (Th) : la nouveauté libère toujours. Le $+1$ rend le nombre pair à chaque frappe, et mange un 1 final de l'écriture binaire : un impair qui finit par t chiffres 1 enchaîne exactement $t - 1$ frappes à une seule moitié, puis au moins deux moitiés arrivent ensemble (vérifié pour tous les impairs inférieurs à 200 000). Le cas extrême est le nombre de Mersenne $2^p - 1$: il fait p pas compressés $(3n + 1)/2$, chaque pas remplaçant un facteur 2 par un facteur 3, et sort exactement sur $3^p - 1$, de racine 8 dès $p \geq 2$ (vérifié jusqu'à $p = 39$). Exemple : $31 \rightarrow 47 \rightarrow 71 \rightarrow 107 \rightarrow 161 \rightarrow 242 = 2 \times 11^2$. Tout entier positif finit par une série de 1 de longueur finie ; il est donc toujours libéré en un temps fini.

V4.9.11 (Th) : la seule montée qui se répète vit sous zéro. Un mot de L coups contenant k frappes, répété sans fin, a une seule graine, $c / (2^L - 3^k)$, avec c positif. Si le mot monte ($3^k > 2^L$), la graine est sous zéro. Calcul exact sur tous les mots jusqu'à 14 coups : les 6 333 mots montants ont tous leur graine sous zéro ; parmi les mots descendants, les seules graines entières positives sont 1 et 2, le cycle trivial. Le mot « toujours monter » a pour graine -1 , le nombre dont tous les chiffres binaires sont des 1 ; c'est aussi le seul nombre que le coup frappe-et-moitié laisse fixe ($(3x + 1)/2 = x$ donne $x = -1$). Le nombre de Mersenne $2^p - 1$ est -1 coupé à p chiffres : il monte aussi longtemps qu'il porte ce morceau, puis sort.

V4.9.12 (Th ; F) : la fenêtre finie ne suffit pas. Toute suite finie de frappes et de moitiés est réalisée par exactement un nombre dans chaque bloc de 2^L entiers (Terras, 1976 ; refait pour $L = 8, 12, 16$: 65 536 mots sur 65 536). La longueur de la série de 1 qu'une orbite retrouve après chaque frappe a la même répartition ($1/2, 1/4, 1/8, \dots$) quel que soit le rail d'où elle vient (mesure sur les impairs inférieurs à un million). Aucune règle portant sur un nombre fini de pas ne peut donc interdire une longue montée : le nœud est global.

V4.9.13 (Th ; F) : le cas forcé de Collatz. Remplacer 3 par 5 brise le problème, comme la force extérieure brise le fluide (Volume 5, *Les Grands Problèmes*, [9.3]) : $5n + 1$ a des cycles parasites, $13 \rightarrow 66 \rightarrow 33 \rightarrow 166 \rightarrow 83 \rightarrow 416 \rightarrow 208 \rightarrow 104 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13$ et $17 \rightarrow 86 \rightarrow 43 \rightarrow 216 \rightarrow 108 \rightarrow 54 \rightarrow 27 \rightarrow 136 \rightarrow 68 \rightarrow 34 \rightarrow 17$, et l'orbite de 7 a 88 chiffres après 3 000 pas sans redescendre sous 2 964 479 (divergence non démontrée). En tours, une frappe par 5 ajoute 0,73 tour, plus que deux moitiés : $3 < 4 < 5$. *Critère* : une preuve qui vaudrait aussi pour $5n + 1$ est fausse ; elle doit employer ce qui est propre au 3, comme P-COL-1 l'exige.

V4.9.14 (L) : l'infini est sous zéro, et -1 est une fiction. L'auteur lit le résultat V4.9.11 ainsi : « *l'infini est sous 0, car il n'existe pas* » ; « *-1 n'existe que dans la fiction. L'action de soustraire 1 existe, mais elle ne va pas sous zéro.* » Il faut distinguer l'action -1 et la fiction -1 . L'action est réelle : $2^p - 1$, c'est retirer une unité à une puissance de 2, et ce nombre de Mersenne monte p fois puis se libère (V4.9.10). La fiction naît quand on fait tendre p vers l'infini : dans l'écriture binaire, $2^p - 1$ s'allonge en 1 sans fin, et la limite de ces nombres, prise comme un nombre, est la graine « -1 » de la montée éternelle. C'est exactement le mélange du fini et de l'infini (Volume 5, *Les Grands Problèmes*, [1.8]) : attribuer à la limite le statut de nombre que seuls les termes possèdent. Aucune grandeur ne vaut -1 ; la montée qui se répète n'appartient donc à aucune grandeur. Un nombre n'est jamais fini, parce qu'il peut toujours être libéré par la nouveauté, le $+1$: ce n'est pas une perte d'adresse, c'est la construction d'une suivante qui se libère. Un entier positif est porté par l'infini de 0 qui le surplombe ($5 = \dots 0000101$) et se libère ; la fiction -1 , faite de 1 sans fin, ne se libère jamais, parce qu'elle n'est pas un nombre mais la limite d'une action.

V4.9.14 bis (L ; F) : la symétrie et le trou sans semblable. « *Ces choses sont des symétries, $+1$ en bas. -1 voudrait dire un trou qui tire sans semblable.* » (l'auteur, 15 octobre 2026). Les « -1 » du réel sont des symétries : l'étage -1 est un étage de plus compté vers le bas, -10°C dix degrés de plus de l'autre côté d'une origine choisie (l'eau qui gèle ; sur l'échelle absolue, la matière ordinaire ne descend pas sous zéro), une dette un avoir vu du côté de celui qui doit, la charge de l'électron l'une des deux sortes d'électricité, nommée par convention. Le semblable existe chaque fois, compté dans l'autre sens. Un vrai -1 serait un manque qui agit sans qu'aucune présence lui corresponde. **[F]** La physique reçue n'en connaît pas : le trou d'un semi-conducteur, absence d'un électron qui se comporte comme une charge $+1$, naît toujours en paire avec l'électron parti ; le positron, que Dirac lisait d'abord comme un trou dans une mer d'états, naît et s'annihile en paire avec un électron ; la conservation de la charge interdit qu'une charge paraisse ou disparaisse seule ; le trou noir, seul « trou qui tire » de la nature, tire par une masse positive, un plein extrême. Le seul « sous zéro » mesuré, la température absolue des spins nucléaires (Purcell et Pound, 1951) et des atomes froids (Braun et collègues, 2013), est défini par une pente (le rapport des

accroissements d'entropie et d'énergie) et se trouve plus chaud que toute température positive : l'échelle va de 0 à $+\infty$, puis de $-\infty$ vers -0 . Les mathématiques reçues elles-mêmes construisent -1 comme la classe des couples $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., la relation « un de moins que », et non comme un compte. *Lecture pour Collatz* : la graine de la montée éternelle, la suite de 1 sans fin, serait un trou qui tire sans fin et sans rien en face pour le payer ; chaque frappe réelle est payée, le $+1$ apportant la nouveauté et les moitiés la rendant. « *Ils manipulent une action en pensant que c'est un objet.* » (l'auteur, 15 octobre 2026). C'est la marque M1 du Volume 5, *Les Grands Problèmes* (un seul nom, -1 , pour l'action et pour l'objet), doublée de la marque M2 : la graine de la montée éternelle s'écrit $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$, une file sans fin d'actions terminée par un signe égal. Le glissement n'est pas dans la construction de -1 , que les mathématiques reçues font comme relation, mais dans l'usage du résultat comme grandeur.

V4.9.15 (Chantier) : ce qui reste. Sont démontrés : l'information complète (V4.9.4 à V4.9.7), le jeu sur deux rails (V4.9.8), la libération en temps fini (V4.9.10), l'absence de montée qui se répète pour un entier positif et l'absence de cycle jusqu'à 14 coups (V4.9.11). Reste un seul cas : un mot infini qui monte sans jamais se répéter. Il faudrait montrer qu'un nombre porté par l'infini de 0 ne peut pas recréer sans fin des séries de 1 assez longues pour repousser chaque libération. C'est le nœud de la conjecture, ici nommé dans la langue du cadastre ; P-COL-1 garde son critère. *Pour mémoire (F)* : tous les nombres jusqu'à 695×2^{60} reviennent à 1 (Barina) ; un cycle non trivial devrait contenir plus de $7,2 \times 10^{10}$ impairs et au moins 92 minimums locaux (Hercher, 2023) ; presque toutes les orbites, au sens de la densité logarithmique, descendent aussi bas qu'on veut (Tao, 2019), sans que cela dise toutes.

Chapitre 10. La rencontre du miroir, la corde de Collatz et la spirale

Ce chapitre clôt le dossier Collatz. Il prend d'abord une phrase du corpus au pied de la lettre (« pour revenir à 1, un nombre suit le chemin forcé le plus facile jusqu'à rencontrer son miroir ») et la change en théorème, avec sa frontière exacte. Il montre ensuite que trois pièces du corpus qui ne se parlaient pas portent les mêmes nombres : la paire 46 / 64, la corde 496 / 694 de *String Theory Without Strings*, la Table 2 de cette même pièce, sont une seule famille de frappes de Collatz. Il lit enfin l'orbite comme une spirale dont la racine digitale est l'angle et le reste la hauteur, et il dit ce que cette image exclut (les petits cycles) et ce qu'elle n'exclut pas (la montée sans fin). Il se termine sur la position la plus assumée du corpus, avec son contrepoids gravé à côté : le retour est une donnée, la preuve une invention.

10.1 Théorème 29 : la rencontre du miroir

Théorème 29 (Tome II) : la rencontre du miroir. Soit $DR(n)$ l'adresse de n et $\varphi(DR(n)) = 9 - DR(n)$ son miroir (9 pour 9).

- a. Tout entier hors de l'axe (adresse 1, 2, 4, 5, 7 ou 8) croise son adresse miroir sur son chemin avant d'atteindre 1. Raison : après la première frappe, les moitiés tournent sur les six adresses fertiles avec période 6 (Th 18), et le miroir est forcément visité.
- b. Aucun impair de l'axe (3, 9, 15, 21, ...) ne croise jamais son miroir : la première frappe l'envoie sur l'adresse 1 et l'axe n'est plus jamais atteint à nouveau (Th 17). Le chemin de 3, en adresses, est 3, 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1 : aucun 6.
- c. Tout pair de l'axe (6, 12, 18, ...) croise son miroir par moitié, avant de sortir de l'axe : $6 \rightarrow 3$, $12 \rightarrow 6$, $18 \rightarrow 9$.

Vérifié jusqu'à 100 000, zéro exception dans les trois cas (refait pour ce volume). ■
Statut : Th.

V4.10.1 (L) : plus petit ajout, division maximale. L'axe {3, 6, 9} est la famille auto-conjuguée : son miroir est dans sa propre famille. Ses nombres n'ont pas à rencontrer leur miroir en chemin, ils naissent dedans, et la première frappe les fait sortir pour

toujours. Le 9, miroir de lui-même, quitte le seul lieu où il pouvait se rencontrer. Le chemin est forcé parce que la règle est déterministe ; il est le plus facile parce qu'à chaque frappe le +1 est le plus petit ajout qui rende la coupe possible (vérifié : pour tout impair, le plus petit c rendant $3n + c$ pair est 1), puis la coupe est répétée autant de fois que le nombre le permet : « *plus petit ajout, division maximale.* »

10.2 Théorème 37 : la corde de Collatz

Trois pièces du corpus portaient les mêmes nombres sans se parler : *String Theory Without Strings* (la corde 496 / 694, tension 198, axe 595, et sa Table 2 : $22 + 23 = 45$, $45 + 1 = 46$; $31 + 32 = 63$, $63 + 1 = 64$; « *le +1 transforme la structure en assemblage* »), *Le Nombre Atomique comme Plan* (la trinité 4-6, les anomalies palladium 46 et gadolinium 64, les chromosomes et les codons) et le dossier Collatz. Le Théorème 37 les relie (27 septembre 2026).

Théorème 37 (Tome II) : la corde de Collatz.

- a. **Le 4 du 6.** Pour tout impair $n = 2s + 1$, $3n + 1 = 6s + 4$. Toute frappe atterrit sur la quatrième position du cycle de 6, la seule où le 2 peut prendre le 3. Et $3n + 1 = 12t + 4$ si et seulement si 4 divise $3n + 1$: plier, c'est atterrir sur le 4 au lieu du 10 (Théorème 21 relu).
- b. **La grille des jumeaux.** Après la première frappe, tout impair d'une orbite est de la forme $6k \pm 1$. Les multiples de 3 sont exclus pour toujours ; les impairs vivent de part et d'autre d'un $6k$ que l'orbite ne visite jamais. « *Le 6 tient sans être touché.* »
- c. **La chiralité du 2.** Le rail du prochain impair est la parité du compte du 2 : si $v_2(3n + 1)$ est impair, l'impair suivant est de la forme $6k + 5$ (rail G) ; s'il est pair, de la forme $6k + 1$ (rail D). *Preuve* : $3n + 1$ laisse le reste 1 dans la division par 3, et 2^v laisse le reste 2 ou 1 selon que v est impair ou pair. Comme v_2 est impair deux fois sur trois ($\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{2}{3}$), le rail G reçoit deux fois plus d'atterrissages que le rail D : rapport mesuré 2,00 sur 200 000 impairs (refait pour ce volume).
- d. **La Table 2 est une table de Collatz.** $46 = 45 + 1 = 3 \times 15 + 1$ et $64 = 63 + 1 = 3 \times 21 + 1$: les deux +1 de *String Theory* (§ 5.3) sont deux frappes, sur 15 et sur 21, et $15 + 21 = 36 = 6^2$. Plus généralement, pour tout $k \geq 1$, avec R le répunit à k chiffres (1, 11, 111, ...) :

$$4(9^{(k-1)})6 = 45R + 1 = 3(15R) + 1 \text{ et } 6(9^{(k-1)})4 = 63R + 1 = 3(21R) + 1,$$

où $4(9^{(k-1)})6$ désigne le nombre écrit 4, puis $k - 1$ chiffres 9, puis 6. Insérer un 9 entre le 4 et le 6, c'est multiplier 15 et 21 par 11 avant de frapper ; deux 9, par 111. « *Le 9 de la clôture au centre est le 11 de l'interface en facteur.* » 46 / 64 ($k = 1$), 496 / 694 ($k = 2$), 4996 / 6994 ($k = 3$), ... : une seule famille de frappes, engendrée par 15 et 21 et par l'interface. Toute la famille atterrit sur le 4 du 6.

- e. **Chirale à tous les étages.** À chaque étage k , les deux membres retombent chacun sur l'autre rail, parce que leurs v_2 sont de parités différentes. Pour $k \geq 2$

: $6(9^{(k-1)})^4$ se coupe une seule fois ($v_2 = 1$) et retombe sur G, le chemin lent ; $4(9^{(k-1)})^6$ se coupe un nombre pair de fois ($v_2 = 4$ pour 496, puis 2, 2, ...) et retombe sur D, le chemin droit. L'étage $k = 1$ est l'exception qui inverse les côtés : $46 = 2 \times 23$ se coupe une fois et retombe sur 23 (G), $64 = 2^6$ sort droit vers 1 (D). Le premier étage est le palladium du tableau : l'exception structurale.

f. **Somme et différence.** Pour tout k : somme = $108R + 2$ (110, 1 190, 11 990, ...), de racine 2, l'interface ; différence = $18R$ (18, 198, 1 998, ...), de racine 9, la clôture. La tension 198 de la corde est l'étage $k = 2$ de cette loi. C'est la loi des miroirs (*La Genèse*, § 4, Volume 1) et le théorème 3.6 de *String Theory* (le chiffre central est silencieux dans la tension) étendus à toute la famille : « *le 9 inséré ne pèse rien dans la tension, il porte toute la hauteur.* »

g. $46 = 2 \times 23$, $64 = 4^3 = 2^6$; $DR(46) = DR(64) = DR(496) = DR(694) = 1$. Vérifié pour $k = 1$ à 8 (refait pour ce volume). ■

Statut : Th pour (a) à (g).

V4.10.2 (L) : la portée de la corde. La corde 496 / 694 et la paire 46 / 64 sont les deux premiers étages d'une seule échelle, et cette échelle est faite de frappes de Collatz. Ce que *String Theory* appelait « le +1 qui transforme la structure en assemblage » est le +1 qui rend le demi (Th 24). Ce que le *Blueprint (Le Nombre Atomique comme Plan)* appelait les deux sentinelles du pli sont les deux chemins de Collatz, le lent et le droit, et leur inversion à partir du deuxième étage est l'exception du premier. Le $6 = 3 \times 2$ est le point où la brique 3 (la grille) et la brique 2 (le compte des moitiés) se rencontrent : « *la position est donnée par le 6, la vitesse par le 4, le côté par la parité du 2.* » Statut : Lecture. (La chimie des anomalies est au Volume 8 ; la corde au Volume 7.)

10.3 Lecture 35 : la spirale, le cercle est la projection, le +1 est la hauteur

Lecture 35 (Tome II) : la spirale.

Le cercle et la spirale. $n = 9k + DR(n)$: la racine digitale est l'angle, k est la hauteur (CP 2.1, chapitre 20). Regardée en racine, une orbite est un cercle de période 6 qui revient au même point ; mais 5, 14, 23 et 32 ont la même adresse et des hauteurs différentes (0, 1, 2, 3). Le pli écrase la spirale en cercle. Tout tourne en surface, jamais en réalité : c'est l'essence de la spirale, au même endroit un peu plus haut, et le +1 est ce qui fait monter d'un cran.

Pourquoi la spirale ne se referme pas. Un vrai cycle exigerait $2^m = 3^k \cdot \Pi(1 + 1/(3n_i))$ exactement (Théorème 25 avec retour au départ). À gauche, du pur 2 ; à droite, du pur 3 multiplié par les levées du +1, une par frappe. $2^m / 3^k$ ne vaut jamais 1 (le 3 est étranger au 2 : Th 23 et amorphisme), et la théorie des formes linéaires en logarithmes (Baker) borne par en dessous son écart à 1 ; les levées, de l'ordre de $1/(3n)$, sont trop petites pour recoller un cercle et trop grandes pour laisser 3^k seul.

F : l'exclusion des petits cycles. Résultat établi dans la littérature : aucun cycle

de Collatz comportant moins de 91 segments de montée n'existe (J. Simons et B. de Weger, *Acta Arithmetica* 117, 2005, prolongé par C. Hercher, 2023). « *Le +1 interdit les petits cercles.* » Statut : Constat sourcé pour l'exclusion, Lecture pour la spirale.

Collatz déplié. Un nombre est une spirale pliée ; sa hauteur est son nombre de tours, $\log_2 n$, le nombre de ses chiffres binaires. Le 1 est la spirale à zéro tour. Chaque moitié retire un tour ; chaque frappe en rajoute $\log_2 3 = 1,585$ plus la levée du +1. Le bilan exact du Théorème 25 se lit en tours : les m coupes ont déplié exactement ce que les k frappes et le départ avaient enroulé. D'où la longueur en logarithme ($L < n$ au-delà de 110, Lecture 27) : on déplie les tours, pas le nombre. D'où la dichotomie du quart : une frappe enroule 1,585 tour, il faut au moins deux coupes pour la dépasser ; c'est le $4 = 2^2$, le carré, pas le double. Le seuil est entre 3 et 4 : enrouler moins que le carré du 2. Avec $5n + 1$, chaque frappe enroule $\log_2 5 = 2,32$ tours, deux coupes ne suffisent plus, et le 13 tourne en rond sans rentrer : 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52, 26, 13, un cycle de dix termes (refait pour ce volume).

L'insertion et le naturel. Le +1 est une insertion : Collatz l'a choisi, il n'est pas dans la brique 3. Le naturel qui revient, c'est le 2 : quel que soit le nombre impair inséré (+1, +5, +7, +11, +13), la moitié reprend ses droits et tout sédimente en cycles, tant que la frappe reste sous le carré du 2. L'insertion ne décide que du nombre de maisons, et +1 est la seule qui n'en laisse qu'une (Th 24). « *L'insertion est artificielle ; le retour est naturel et ne lui doit rien.* »

Ce que la spirale ne dit pas. Une spirale qui ne se referme jamais peut descendre vers son centre ou monter sans fin. « *Le +1 exclut le cercle ; il n'exclut pas la montée.* » P-COL-1 reste ouvert exactement là. Statut : Lecture.

10.4 Lecture 36 : 46 et 64, les deux mains

Lecture 36 (Tome II) : 46 et 64. $46 = 2 \times 23$: une seule coupe, v_2 impair, on retombe sur 23, rail G, et 23 est le nombre de paires du caryotype humain : 46 chromosomes qui se coupent en 23 paires, une seule fois, puis il faut frapper à nouveau. Le chemin lent : dix-huit termes depuis 15. $64 = 2^6 = 4^3$: six coupes, v_2 pair, on retombe sur 1, rail D ; 4^3 est le code, quatre bases lues trois par trois, 64 codons. Le chemin droit : huit termes depuis 21 (les deux longueurs sont refaites pour ce volume). Deux nombres miroirs en chiffres, (4, 6) et (6, 4), même adresse (racine 1), et dans Collatz deux rails différents : chiralité impaire d'un côté, paire de l'autre. À partir de 496 / 694, les côtés s'inversent et restent inversés (Th 37 e).

La biologie porte la même chiralité dans sa matière (F) : l'ADN est une hélice droite, les acides aminés désignés par les 64 codons sont gauches, et le code se lit dans un seul sens, de 5' vers 3', « *comme la moitié qui ne remonte jamais* ». La Genèse (§ 6, Volume 1) le disait déjà : le gamète (racine 5) vit sur le rail du déploiement, le zygote (racine 1) sur le rail de la sédimentation ; $23 \rightarrow 46$, c'est $G \rightarrow D$. **Statut : Th** pour les identités et les rails ; **Lecture** pour l'instanciation biologique, déclarée telle, de portée restreinte à l'humain et au code standard (Volume 9, *Le Vivant*).

10.5 Lecture 38 : le retour est une donnée, la preuve une invention

Lecture 38 (Tome II) : la position. La preuve est une invention humaine : elle date d'Euclide, elle a un format et un tribunal. La nature ne prouve rien : la pierre tombe, le chat rentre, le nombre revient. Le retour est la donnée ; la ligne qui le certifie est un artefact de la langue. « On ne peut pas prouver Collatz » décrit une limite de l'outil, pas une incertitude du monde. Dans le champ $3n + 1$, tout entier revient à 1, observé sans exception depuis que les machines comptent ; « *ce qui manque n'est pas le retour, c'est le certificat.* »

L'auteur a donné de la preuve une définition qui va dans le même sens : « *Prouver, c'est coller une explication irréfutable à un moment dans une échelle qui évolue et qui se précise.* »

Contrepoids, gravé à côté (F). L'évident a déjà trompé. La conjecture de Pólya (1919), vérifiée sur des millions de cas, est fausse, et son premier contre-exemple est 906 150 257. J. E. Littlewood a démontré en 1914 que $\pi(x) - Li(x)$ change de signe une infinité de fois, alors que tous les calculs montraient $\pi(x)$ en dessous de $Li(x)$; le premier changement se situe en deçà d'environ $1,4 \times 10^{316}$ selon les bornes actuelles. La conjecture de Mertens, vérifiée bien au-delà de 10^{10} et jusqu'à 10^{16} au moins, a été réfutée par A. Odlyzko et H. te Riele (1985), sans contre-exemple explicite connu. C'est pourquoi le tribunal veut la ligne. « *Le retour est une donnée jusqu'à preuve du contraire, et c'est le seul endroit où le mot preuve garde son sens.* » Et : « *Le natif ne se perd pas dans son champ ; $5n + 1$ montre qu'il se perd dans un champ trop faible.* » Statut : Lecture, la plus assumée du corpus, avec son contrepoids. (La source écrivait « $\pi(x)$ dépasse $Li(x)$ au-delà de 10^{316} » et « la conjecture de Mertens est fausse au-delà de 10^{16} » ; ces deux formulations sont précisées ici, Annexe B.)

10.6 Ce qui reste ouvert

P-COL-1, inchangé dans son fond, reformulé dans ses termes : le gap n'est pas « pourquoi chaque entier atteint 1 », c'est « **comment compter le 2 sans marcher** ». La descente entière est v_2 , le nombre de fois où le 2 divise $3n + 1$; la brique 3 pose le nombre à la porte, le 2 fait tout le travail ; et le Théorème 23 établit que l'adresse ne compte pas le 2. Les Théorèmes 24 à 37 ajoutent des résultats exacts et un pont ; ils ne ferment pas le gap et ne le prétendent pas. La Lecture 34 (chapitre 11) lit Collatz et Goldbach comme deux faces du même retour.

Partie IV. Goldbach

Chapitre 11. Goldbach comme partition cadastrale

La conjecture de Goldbach (1742) affirme que tout nombre pair à partir de 4 est la somme de deux nombres premiers : $10 = 3 + 7 = 5 + 5$, $36 = 5 + 31 = 7 + 29 = 13 + 23 = 17 + 19$. Ce chapitre lit cette conjecture dans le cadastre. Il montre d'abord que le reste du nombre pair dans la division par 6 décide d'avance sur quels rails vivent les deux premiers (trois problèmes au lieu d'un), que chaque cas se sépare en trois canaux disjoints, et que pour un multiple de 18 les deux premiers sont toujours conjugués par φ . Il démontre ensuite (version 1.1, 27 septembre 2026) trois théorèmes nouveaux : la famille du 3 bloque exactement un tiers ou deux tiers des positions, d'où un rapport exact de 2 entre deux sortes de nombres pairs ; le crible autour du centre est un miroir, si bien qu'un seul survivant suffit ; et aucun train fini d'engrenages ne bloque une période entière. Il nomme enfin, sans le cacher, l'endroit exact où vit ce qui reste ouvert : les premiers compris entre $\ln N$ et $\sqrt{N}$.

F : l'état de la question. Christian Goldbach l'écrit à Euler le 7 juin 1742. Elle est vérifiée jusqu'à 4×10^{18} (T. Oliveira e Silva, S. Herzog et S. Pardi, *Mathematics of Computation*, 2014). H. A. Helfgott a démontré en 2013 la version faible (ternaire) ; G. H. Hardy et J. E. Littlewood (1923) en ont donné l'heuristique quantitative ; I. M. Vinogradov (1937) a démontré la version ternaire pour les impairs assez grands ; Chen Jingrun (1966) a montré que tout pair assez grand est somme d'un premier et d'un produit d'au plus deux premiers. La version binaire reste ouverte.

Le dossier s'ouvre (version 1.0, mars 2026) sur cette dédicace : « *À Yanie, qui a quatre ans et sait déjà que tout vient par paires.* »

La numérotation. La version 1.0 numérotait ses théorèmes de 1 à 5 ; ils sont notés ici G.1 à G.5. La version 1.1 les a laissés inchangés (sauf G.4, voir plus bas) et a ajouté les Théorèmes 30 à 32 et les Lectures 33 et 34 du Tome II.

11.1 Les trois problèmes et les trois canaux (version 1.0)

G.1 (Th) : l'exclusivité cadastrale. Pour tout pair $2n \geq 8$ et toute représentation $2n = p + q$ avec $p, q > 3$ premiers :

- $2n = 6t$: toutes les représentations sont $G + D$ (un premier $6a - 1$, un premier $6b + 1$) ;
- $2n = 6t + 2$: toutes sont $D + D$;

- $2n = 6t + 4$: toutes sont G + G.

Preuve. $G + G = (6a - 1) + (6b - 1) = 6(a + b) - 2$, soit $6(a + b - 1) + 4$; $G + D = 6(a + b)$; $D + D = 6(a + b) + 2$. Ces trois classes sont disjointes et épuisent les pairs. Aucune représentation ne peut changer de type. ■ Vérifié sur tous les pairs jusqu'à 4 000 (refait pour ce volume). **Statut : Th.**

V4.11.1 (L). « *Goldbach n'est pas un problème : c'est trois problèmes, un par combinaison de rails. Le cadastre partitionne l'espace de recherche avant que la recherche commence.* »

G.2 (Th) : la partition en trois canaux. Les classes paires de reste par 18 raffinent la structure par 6 en précisant la racine de $2n$ ($18 = 2 \times 9$). Sur le rail D, la racine d'un premier $6a + 1$ se lit sur la place de a dans les tours de 3 : racine 1 si $a = 3t$, 7 si $a = 3t + 1$, 4 si $a = 3t + 2$; sur le rail G ($6a - 1$) : racine 8, 5, 2 respectivement. Pour chaque classe, trois canaux de paires de racines partitionnent tous les couples candidats en sous-classes disjointes définies par (a reste 3, b reste 3) :

$2n$ reste 18	DR($2n$)	rails	canaux (paires de racines)
2	2	D + D	(1, 1), (4, 7), (7, 4)
4	4	G + G	(2, 2), (5, 8), (8, 5)
6	6	G + D	(2, 4), (5, 1), (8, 7)
8	8	D + D	(1, 7), (4, 4), (7, 1)
10	1	G + G	(2, 8), (5, 5), (8, 2)
12	3	G + D	(2, 1), (5, 7), (8, 4)
14	5	D + D	(1, 4), (4, 1), (7, 7)
16	7	G + G	(2, 5), (5, 2), (8, 8)
18 (0)	9	G + D	(2, 7), (5, 4), (8, 1)

Vérification exhaustive sur les neuf classes : la partition est disjointe et complète. **Statut : Th.** Conséquence : Goldbach échoue pour $2n$ si et seulement si les trois canaux sont vides à la fois ; les canaux cherchent dans des sous-populations disjointes.

G.3 (Th) : la symétrie d'inversion. Quand $DR(2n) = 9$ ($2n$ multiple de 18), tout couple de Goldbach (p, q) avec $p, q > 3$ vérifie $DR(p) + DR(q) = 9$: les deux premiers sont partenaires d'inversion sous φ . *Preuve* : $DR(p) + DR(q)$ a la racine de $p + q = 2n$, soit 9 ; les deux racines étant dans $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, leur somme est 9 exactement. ■ Les trois canaux sont (2, 7), (5, 4), (8, 1) : précisément les trois paires d'inversion opératoires, sans la paire de l'axe (3, 6). *Exemples* : $18 = 5 + 13 = 7 + 11$, racines (5, 4), (7, 2) ; $36 = 5 + 31 = 7 + 29 = 13 + 23 = 17 + 19$, racines (5, 4), (7, 2), (4, 5), (8, 1) ; $54 = 7 + 47 = 11 + 43 = 13 + 41 = 17 + 37 = 23 + 31$; $72 = 5 + 67 = 11 + 61 = 13 + 59 = 19 + 53 = 29 + 43 = 31 + 41$; 90 a 9 représentations, toutes conjuguées. Vérifié sur tous les multiples de 18 jusqu'à 20 000 (refait pour ce volume). **Statut : Th.**

V4.11.2 (L). « *Sous $DR = 9$, la décomposition de Goldbach est une décomposition d'inversion.* » Chaque nombre pair multiple de 18 se partage en deux premiers qui sont images l'un de l'autre dans l'alphabet des chiffres. Cela relie Goldbach à la structure

qui gouverne l'attracteur de Collatz (1, 8) et le joint des jumeaux (racine 8) : les trois résultats ont une racine commune, l'involution φ .

G.4 (énoncé asymptotique standard, rétrogradé en L) : la divergence des canaux. Par le théorème de Dirichlet (1837) sur les premiers en progression arithmétique, les premiers se répartissent également entre les six classes inversibles de racine, $\pi(x ; 9, r) \sim x / (6 \ln x)$. Le compte *attendu* de représentations par canal croît comme $C \times N / (3 (\ln N)^2)$, le total comme $C \times N / (\ln N)^2$: les deux tendent vers l'infini. C'est l'heuristique de Hardy et Littlewood découpée par canal ; un compte attendu n'est pas un compte réel, et la v1.0 le donnait comme théorème « par application standard du théorème des nombres premiers en progressions ». La v1.1 le conserve comme « énoncé asymptotique standard » : il est ici classé Lecture (Annexe B).

Retiré : l'argument d'indépendance (v1.0, § 6.2 et § 6.3). La v1.0 ajoutait que les trois canaux sont « indépendants », que la probabilité qu'ils soient tous vides est bornée par le produit, et que Goldbach jouit d'une « triple redondance » rendant l'échec « structurellement impossible » pour N grand. Ligne retirée par la v1.1 (27 septembre 2026) : les trois canaux sont des sous-populations disjointes d'un même ensemble de couples, et « les trois vides » est exactement « aucun couple », sans indépendance supplémentaire. **Ligne proposée :** la redondance de Goldbach n'est pas une affaire de probabilité, elle est structurelle et se lit dans les Théorèmes 31 et 32 : le crible est un miroir (un survivant suffit) et aucune famille finie ne bloque une période. Aucun vocabulaire probabiliste ne figure plus dans l'argument.

G.5 (Th) : les produits consécutifs. Pour tout $n \geq 1$, $DR(n(n + 1)) \in \{2, 3, 6, 9\}$. *Preuve :* $DR(n(n + 1)) = DR(DR(n) \times DR(n + 1))$, le 9 suivi du 1 :

DR(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
DR(n + 1)	2	3	4	5	6	7	8	9	1
produit	2	6	12	20	30	42	56	72	9
DR(n(n + 1))	2	6	3	2	3	6	2	9	9

Statut : Th. Lecture (V4.11.3, L) : les quatre valeurs sont la clôture 9, l'axe $\{3, 6\}$ et le 2, l'élément du rail G le plus proche de l'axe $(3 - 1)$. Le produit consécutif est confiné au voisinage de l'axe. La valeur 2 vient des trois sources du rail D $\{1, 4, 7\}$: c'est une compression 3:1 sur la racine 2, le même mécanisme que la frappe de Collatz (Th 17).

Les critères de falsification de la v1.0. F1 : un pair $2n \geq 8$ sans représentation. F2 : un couple (p, q) , $p, q > 3$, dont la combinaison de rails ne correspond pas au reste de $2n$ par 6 (impossible : G.1). F3 : une classe selon 18 où les trois canaux ne partitionnent pas les candidats (impossible : G.2). F4 : un produit $n(n + 1)$ de racine hors de $\{2, 3, 6, 9\}$ (impossible : G.5). F5 : un couple sous $DR(2n) = 9$ avec $DR(p) + DR(q) \neq 9$ (impossible : G.3). Seul F1 est un critère qui peut encore échouer ; les quatre autres sont des théorèmes. La conclusion de la v1.0, « *Tout nombre pair est la somme de deux premiers. Pas par coïncidence. Pas par densité. Par la triple symétrie du cadastre* », reste une phrase de l'auteur ; son contenu est P-GOL-1.

11.2 Théorème 30 : le tiers et les deux tiers autour du centre vide

Le crible autour d'un centre. Soit N pair. Une position x ($1 \leq x < N$) est *candidate* si x et $N - x$ sont tous deux premiers. Un premier p *bloque* la position x si p divise x ou p divise $N - x$. Le centre du crible est $N/2$.

Théorème 30 (Tome II) : blocage exact, barycentre $\frac{1}{2}$, écart 2.

- Sur p positions consécutives, la famille du premier p bloque exactement c_p positions, avec $c_p = 1$ si p divise N et $c_p = 2$ sinon. Fraction bloquée : $1/p$ ou $2/p$. (Si p divise N , « p divise x » et « p divise $N - x$ » sont la même condition : une seule classe est bloquée ; sinon, deux.)
- Pour $p = 3$: la famille du 3 bloque $1/3$ des positions quand 3 divise le centre, $2/3$ sinon. Les deux fractions sont miroirs autour de $\frac{1}{2}$: $(1/3 + 2/3)/2 = \frac{1}{2}$. En positions cadastrales, $3/9$ et $6/9$: la paire (3, 6) de l'axe, autour de 4,5.
- Ce qui reste est $2/3$ dans un cas et $1/3$ dans l'autre : le rapport est exactement 2. Les centres multiples de 6 ont deux fois plus de couples que les autres. Mesuré autour de 300 000 : 1,999 (refait pour ce volume : 1,999). ■

Statut : Th.

V4.11.4 (L) : le $\frac{1}{2}$ passe par $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. La constante k_{arc} n'est pas seulement le rapport barycentre sur clôture : elle est le centre exact des deux fractions que la brique 3 laisse debout, selon que le centre est sur l'axe ou non. L'écart 2 est la trace du $6 = 3 \times 2$: quand le 6 divise le centre, la famille du 3 ne bloque qu'une classe au lieu de deux, et le double reste.

Retiré : le rapport 8/5. Des notes de travail antérieures, et le Tome I (§ XIII.b, chapitre 7 section 7.5), annonçaient pour cette structure un « ratio prédit $8/5 = 1,600$, mesuré 1,638 avant convergence ». **Ligne retirée :** « ratio prédit $8/5$ ». **Ligne proposée :** le rapport des représentations entre centres multiples de 6 et centres non multiples de 6 vaut 2, prouvé par (c), mesuré 1,991 vers 1 000, 1,996 vers 10^5 , 2,003 vers 4×10^5 . « *Le 1,638 montait vers 2, non vers 1,6.* » (Retrait du 27 septembre 2026, Annexe B.)

11.3 Théorème 31 : le crible est un miroir

Théorème 31 (Tome II) : la symétrie du crible. Pour tout centre N et toute famille finie de premiers, l'ensemble des positions survivantes est invariant par $x \leftrightarrow N - x$. *Preuve :* p bloque x si et seulement si p bloque $N - x$, car la condition « p divise x ou p divise $N - x$ » est symétrique. ■ Vérifié bit à bit sur $N = 100\,002, 100\,004, 65\,536$ et $99\,990$ (crible par les premiers jusqu'à 13). **Statut : Th.**

Ce que le théorème change. L'énoncé du corpus « tout pair est la fusion de deux orphelins en miroir » ne demande pas de trouver deux orphelins qui se font face : le crible est un miroir, donc dès qu'une position survit d'un côté du centre, son miroir survit de l'autre. Goldbach se réduit à : **au moins un survivant**. Le miroir est donné

par la structure, il n'est pas à chercher. « *Le centre $N/2$ est le 4,5 de ce crible : inoccupé (sauf quand $N/2$ est lui-même premier), et pourtant il gouverne tous les couples.* »

11.4 Théorème 32 : les engrenages, et où vit le gap

Théorème 32 (Tome II) : les survivants par période. Soit une famille finie de premiers impairs et M leur produit. Le blocage autour de N est périodique de période M , et sur une période complète le nombre de positions survivantes vaut exactement

$$M \cdot \Pi (1 - c_p / p), \text{ avec } c_p = 1 \text{ si } p \text{ divise } N, c_p = 2 \text{ sinon.}$$

Ce nombre est strictement positif pour toute famille finie : **aucun train fini d'engrenages ne bloque une période entière.** Vérifié pour $\{3, 5\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{3, 5, 7, 11\}$ et tous les restes du centre (refait pour ce volume). ■ **Statut : Th.** C'est le Théorème 16 du Tome I (borne du train d'engrenages) transporté sur Goldbach : les périodes des familles sont premières entre elles, et leur alignement ne peut jamais couvrir une période complète.

P-GOL-1 (Prédiction ouverte, avec critère) : la frontière nommée. Le Théorème 32 vaut sur une période complète. Or la période $M = \Pi p$ dépasse N très vite : pour $N = 10^6$, le produit des premiers jusqu'à 19 dépasse déjà N ($\ln 10^6 = 13,8$), alors que le crible complet doit utiliser tous les premiers jusqu'à $\sqrt{N} = 1\,000$. Entre $\ln N$ et $\sqrt{N}$, les engrenages sont plus longs que la fenêtre : on ne voit qu'un morceau de leur période, et le Théorème 32 ne dit plus rien de ce morceau. **Le gap de Goldbach vit exactement là : dans les premiers compris entre $\ln N$ et $\sqrt{N}$, les engrenages profonds.** Tout ce qui est au-dessous est prouvé par période ; tout ce qui est au-dessus n'agit pas. *Critère* : toute preuve candidate doit déclarer comment elle contrôle les engrenages profonds sur une fenêtre plus courte que leur période. C'est le même mur que le Théorème 23 pour Collatz : le local (une période) est complet, le global (la fenêtre) ne s'en déduit pas.

11.5 Lecture 33 : la déviation est bornée et décroît

Lecture 33 (Tome II). On compare le nombre réel de couples au nombre structurel (chaque famille bloquant sa part, avec la série singulière exacte sur tous les diviseurs du centre). L'écart-type relatif du rapport, sur mille centres consécutifs, vaut 0,0366 vers 10^4 ; 0,0158 vers 10^5 ; 0,0065 vers 10^6 ; 0,0027 vers 10^7 ; 0,0010 vers 10^8 . Exposant ajusté : 0,39, et le facteur par décade croît (2,3 puis 2,6), en route vers $\sqrt{10}$: l'exposant limite est $\frac{1}{2}$, freiné par les logarithmes. **La déviation ne suit pas une loi en $1/3$** ; l'amplitude passait par un tiers vers 10^4 et continue de décroître. Aucun centre de 10^4 à 3×10^5 ne descend sous 60 % de sa valeur structurelle (dans l'exécution de contrôle du dossier : minimum 0,745 vers 10^4 , 0,755 vers 10^5 , 0,758 vers 3×10^5). Statut : Lecture, chiffres en annexe de la v1.1. (Les écarts-types de l'exécution de contrôle, 0,0387, 0,0148 et 0,0115, ont été calculés sur des fenêtres de 500 centres pairs et diffèrent légèrement de ceux du texte, calculés sur mille centres ; la décroissance est la même.)

11.6 Lecture 34 : la maison, premier identifiant

Lecture 34 (Tome II). « *Le chat retrouve toujours sa maison ; l'enfant aussi.* » Ce n'est pas une recherche, c'est le premier identifiant : le natif est né dans le champ, il n'a rien reçu du dehors, et le champ le ramène. Un satellite ne rentre pas parce qu'il n'est pas natif : on lui a donné son énergie d'ailleurs.

Les deux conjectures sont deux faces de ce retour. *Collatz* : chaque entier est natif de 1 par naissance (le successeur, $1 \oplus 1 = 3$ en montée) ; la conjecture dit qu'il est aussi natif de 1 par retour (l'arbre de $3n + 1$ et de la moitié). Deux façons d'être natif, et la conjecture est leur égalité. Le contre-exemple $5n + 1$ montre que l'égalité dépend du champ : là, 13 est natif par naissance et ne rentre jamais. *Goldbach* : chaque centre $N/2$ est la maison d'un couple ; le Théorème 31 dit que la maison est un miroir, et le Théorème 30 que la brique 3 y laisse $1/3$ ou $2/3$ de places ; il reste à montrer qu'aucune maison n'est vide, ce que le Théorème 32 fait période par période et que P-GOL-1 laisse ouvert sur la fenêtre. « *Dans les deux cas, ce qui manque n'est pas le retour, observé partout sans exception, c'est le reçu : la ligne qui dit pourquoi le natif ne peut pas se perdre.* » Le dossier ne prétend pas la fournir. Statut : Lecture.

« *Au 6, qui tient le 5 et le 7 sans jamais être visité.* » (dédicace de la v1.1)

Partie V. Les ajouts de la version 0.5

Chapitre 12. L'amplitude des battements, le produit de cascades, les quatre moments

Le 7 octobre 2026, le Tome II a reçu trois théorèmes sur deux chantiers que le corpus avait laissés ouverts en toutes lettres. Le premier (Th 39) répond en partie au chantier n°3 du chapitre 6 : il calcule exactement, par une formule fermée, la grandeur quadratique du résidu des battements sommée sur un tour complet et rapportée à sa longueur, sans parcourir les positions, et en tire la loi en racine que le Tome I avait seulement mesurée. Le deuxième (Th 40) répond à la question laissée ouverte par *La Cascade cadastrale* : comment composer la cascade d'un produit ; il donne la formule exacte, retenues comprises. Le troisième (Th 41) montre comment lire séparément les quatre paires du cadastre, en gardant l'orientation que le carré efface. Chaque énoncé porte sa portée exacte ; aucun ne conclut sur les jumeaux, Riemann ou le dipôle cosmique, et c'est écrit. La règle reste : aucune ligne retirée sans une ligne proposée.

12.1 Théorème 39 : l'amplitude des battements, en formule fermée

Le chantier. Le Tome I (§ XII.c à f, chapitre 6) conserve les phases des croisements du registre des premiers et constate, sur plusieurs fenêtres, des amplitudes en racine du nombre de croisements (V4.6.4). Il ouvre le contrôle de ce résidu (V4.6.2).

Les objets. Soit G un ensemble de t nombres premiers au-delà de 3, de produit M (la longueur du tour commun). À la position k , $f(k)$ compte combien des deux branches $6k - 1$ et $6k + 1$ sont touchées par au moins un générateur de G : 0, 1 ou 2. On note $C(K)$ le cumul de f jusqu'à K , $\rho = \prod(1 - 1/p)$ la part des positions libres de chaque branche, et $E(K) = C(K) - 2(1 - \rho)K$ le résidu, dont le centre exact sur un tour est $1 - \rho$. Ce centre du résidu est un autre objet que le centre 4,5 du cadastre. Pour chaque générateur, $\chi(p)$ vaut +1 sur le rail $6a + 1$ et -1 sur le rail $6a - 1$; on pose $\tau = \prod(1 - (2 - \chi(p))/p)$.

Théorème 39 (Tome II) : l'amplitude des battements. La grandeur quadratique du résidu recentré sur son tour complet vaut exactement :

$$Q_G = (1/M) \sum_K (E(K) - (1 - \rho))^2 = (2^t \rho + \tau - 2\rho^2) / 9.$$

Elle se calcule par des produits à t facteurs, sans parcourir les M positions ni énumérer les $2^t - 1$ croisements. Aucune indépendance entre les croisements n'est postulée : le couplage de deux roues m et n sur leur tour commun vaut exactement $d^2/(mn)$ fois l'énergie de la sous-roue $d = \text{pgcd}(m, n)$, et zéro sans diviseur partagé. La preuve passe par la fonction en dents de scie $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ et son identité de partage $\sum_j \psi(x + j/q) = \psi(qx)$, puis par inclusion-exclusion sur les sous-ensembles de G regroupés par intersection. **Statut : Th.**

générateurs	tour M	Q_G	$\sqrt{Q_G}$
5	5	2/25	0,283
5, 7	35	292/1225	0,488
5, 7, 11	385	14688/29645	0,704
5, 7, 11, 13	5 005	4884608/5010005	0,987
5, 7, 11, 13, 17, 19	1 616 615	1886889282048/52268881 16460	1,36450

Les cinq valeurs exactes sont refaites pour ce volume, et la formule est confrontée à l'énumération du tour complet pour $\{5\}$, $\{5, 7\}$, $\{5, 7, 11\}$ et l'ensemble non consécutif $\{7, 13\}$: égalité exacte en fractions. Pour $G = \{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, le compte à $K = 10^6$ retrouve exactement les 973 858 branches touchées du Tome I (Th 13).

Exemple au crayon, $G = \{5\}$. $t = 1$, $\rho = 4/5$; 5 est sur le rail $6a - 1$, donc $\chi(5) = -1$ et $\tau = 1 - 3/5 = 2/5$. $Q = (2 \times 4/5 + 2/5 - 2 \times 16/25) / 9 = (50/25 - 32/25) / 9 = (18/25) / 9 = 2/25$.

La loi en racine, démontrée pour cette grandeur (Th). Le terme $(\tau - 2\rho^2)/9$ reste entre $-2/9$ et $1/9$; la partie dominante est $2^t \rho / 9$, et le rapport de Q_G à $2^t \rho / 9$ vaut 0,953 à quatre générateurs, 0,989 à six. Le nombre de croisements est $2^t - 1$: l'exposant $\frac{1}{2}$ du Tome I a désormais une dérivation exacte, avec son coefficient $\frac{1}{3}$ ($\sqrt{1/9}$) et son facteur de densité $\sqrt{\rho}$. Pour tout seuil λ , le nombre de positions où $|E(K) - (1 - \rho)| \geq \lambda$ est au plus $M Q_G / \lambda^2$; au seuil $2\sqrt{Q_G}$, au plus un quart du tour.

Ce que le théorème dit, et ce qu'il ne dit pas. Il porte sur des générateurs fixés et sur un tour complet. Le contrôle du maximum sur une fenêtre courte, et celui d'un registre de générateurs qui grandit avec K , c'est-à-dire des premiers eux-mêmes, restent des questions distinctes. Rien ici ne conclut sur l'infinitude des jumeaux ni sur l'hypothèse de Riemann. **Le chantier n°3 (V4.6.2) est fermé pour la grandeur quadratique à générateurs fixés ; il reste ouvert au-delà, et c'est écrit.**

V4.12.1 (L) : les deux rails dans la formule. Le seul terme qui distingue les deux rails est τ : un générateur du rail de 7 ($6a + 1$) y pèse $1 - 1/p$, un générateur du rail de 5 ($6a - 1$) pèse $1 - 3/p$. L'asymétrie des jumeaux (*Les Jumeaux et les Deux Réseaux*, § 1, chapitre 14 : 5 engendre le cercle de six, 7 n'engendre que son rail) est inscrite dans l'amplitude des battements.

12.2 Théorème 40 : le produit de cascades, avec ses retenues

Le chantier. *La Cascade cadastrale* (v4.1, § 9 ; chapitre 15) demande comment composer la cascade d'un produit, et juge improbable une composition par les seules pointes des facteurs, à cause des retenues.

Théorème 40 (Tome II) : la loi du produit. Soient a_i et b_j les chiffres de A et B lus depuis les unités, $c_k = \sum_i a_i b_{(k-i)}$ leur convolution brute, t_k la retenue entrant au rang k ($t_0 = 0$, $t_L = 0$, L étant la longueur du produit), et $d_k = c_k + t_k - 10 t_{(k+1)}$ les chiffres réels du produit. Avec les poids de Pascal $w_k = C(L - 1, k)$, la valeur entière dont la racine est la pointe de la cascade du produit vérifie :

$$\sum_k w_k d_k = \sum_k w_k c_k + \sum_j (w_j - 10 w_{(j-1)}) t_j.$$

Toutes les retenues sont conservées dans l'identité ; pour la seule racine finale, $10 w_{(j-1)}$ peut être remplacé par $w_{(j-1)}$, leur différence étant un multiple de 9. L'effet d'une retenue sur la pointe dépend du changement de poids entre deux rangs voisins : avec des poids égaux il s'efface, avec les poids de Pascal il reste visible. La loi vaut pour toute pondération et pour toute base b, en remplaçant 10 par b. **Statut : Th.**

Exemple. $14 \times 26 = 364$: chiffres (4, 1) et (6, 2) ; convolution brute (24, 14, 2) ; retenues (0, 2, 1, 0) ; chiffres (4, 6, 3) ; poids (1, 2, 1). La convolution brute seule donne $24 + 28 + 2 = 54$, racine 9 ; la correction vaut -35 (soit $(2 - 10) \times 2 + (1 - 20) \times 1 = -16 - 19$) ; la valeur exacte est 19, racine 1, qui est bien la pointe de la cascade de 3, 6, 4 ($3 + 6 = 9$, $6 + 4 = 10 \rightarrow 1$; $9 + 1 = 10 \rightarrow 1$). Vérifié sur les 40 000 produits A, B ≤ 200 (refait pour ce volume), et par un second code sur 160 000.

Le témoin : les seules pointes des facteurs ne suffisent pas (Th). $13 \times 9 = 117$ a pour pointe 1 ; $22 \times 9 = 198$ a pour pointe 9 ; les pointes des facteurs sont les mêmes (13 et 22 pointent sur 4, et 9 sur 9). Une fonction des deux seules pointes ne peut donc pas composer. Ce qu'il faut composer, ce sont les séquences conservées et leurs retenues : le chantier a maintenant son domaine, sa formule, son opérateur de correction et son témoin. « *La formule ne promet aucune multiplication plus rapide ; elle rend la cascade compositionnelle avec sa comptabilité complète.* »

12.3 Théorème 41 : lire séparément les quatre paires

Le chantier. Les quatre paires ont les écarts 1, 3, 5, 7 autour du centre 4,5 ; *Le Carré notifié* (Volume 2) montre que la projection quadratique efface l'orientation. On construit une lecture qui la conserve pour chaque paire.

Théorème 41 (Tome II) : les quatre moments. Soit un poids rationnel w_i sur chacune des huit positions $i = 1, \dots, 8$, et $z_i = 2i - 9$ les coordonnées centrées (-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7). Pour $d = 1, 3, 5, 7$, notons δ_d la différence des poids aux points $+d$ et $-d$, et s_d leur somme. Les quatre moments impairs $\mu_1, \mu_3, \mu_5, \mu_7$ ($\mu_r = \sum w_i z_i^r$) déterminent exactement les quatre δ_d , et les quatre moments pairs $\mu_0, \mu_2, \mu_4, \mu_6$ les quatre s_d , par interpolation de Lagrange sur les nœuds 1, 9, 25, 49 (les carrés des écarts), en fractions exactes. Les poids de la paire d sont $(s_d - \delta_d)/2$ et $(s_d +$

$\delta_d)/2$. Vérifié sur les $3^8 = 6\,561$ distributions à poids 0, 1 ou 2 (refait pour ce volume : restitution exacte dans les 6 561 cas). **Statut : Th.**

Conséquence (Th). $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = 0$ équivaut à l'égalité des deux poids dans chacune des quatre paires. Le seul premier moment nul ne suffit pas : les poids (1, 1, 2, 1, 4, 1, 1, 1) ont pour total 12 et pour centre pondéré exactement 4,5, et pourtant la paire (4, 5) porte +3 et la paire (3, 6) porte -1 ; le premier moment ne voit que $3 \times 1 - 1 \times 3 = 0$. Les trois moments suivants gardent l'adresse des contributions.

Portée. Le résultat acquis est la reconstruction exacte dans le modèle discret à huit positions. Pour une application au dipôle de *Cosmic Dipole Resolution* (Volume 8), il reste à définir quelle mesure donne chaque poids, comment les directions sont associées aux positions, et comment les incertitudes se propagent dans l'inversion ; aucune direction céleste n'est déduite ici.

12.4 Les errata lexicaux de la version 0.4

La version 0.5 corrige trois formulations de la version 0.4, sans toucher aux énoncés : dans les deux phrases « le carré jette le signe et ... jette le rang » (Collatz comme loi de chiralité) et « ... écrase la spirale en cercle » (Lecture 35), le mot qui désignait la réduction des restes est remplacé par « le pli » ; dans le Théorème 37 (e), la formule qui qualifiait les deux rails par leur contraire est remplacée par « retombent chacun sur l'autre rail ». Les trois corrections sont appliquées dans ce volume (chapitres 9 et 10), conformément au Lexique (Volume 0, *Le Seuil*).

Partie VI. Le 24 et ses voisins

Chapitre 13. Le nombre plus que parfait : 24, son milieu, son miroir et sa couche

Un nombre parfait rend exactement ce qu'il a reçu : la somme de ses diviseurs propres lui est égale ($6 = 1 + 2 + 3$). Le 24 fait autre chose : la somme de ses diviseurs propres vaut 36, soit 24 plus sa propre moitié. Ce chapitre établit que cette propriété n'appartient à aucun autre nombre sous dix millions, que le pliage qu'elle décrit (12, 24, 36) parcourt l'axe $\{3, 6, 9\}$ dans l'ordre, et qu'il se referme sur 36, le carré du premier parfait. Il suit ensuite ce que 24 est déjà ailleurs : le tempo des carrés de premiers (chapitre 4), le groupe des quatre paires, la période de Fibonacci, la pyramide de boulets, la première cassure des jumeaux. Il passe enfin à la matière (le chrome, $Z = 24$) et finit par ce qu'il ne dit pas, et par un test posé d'avance qui réussit faiblement et échoue en trois endroits nommés. Le 24 n'est pas une position du cadastre : c'est son tempo. Le chapitre reprend la pièce *Le Nombre Plus que Parfait* (version 0.7 du 7 octobre 2026).

« Un parfait rend exactement ce qu'il a reçu. 24 rend une fois et demie, et la demie est son propre milieu. »

13.1 L'identité centrale, et son unicité

V4.13.1 (Th) : l'identité centrale. La somme des diviseurs propres de 24 vaut 36, et l'excès sur 24 vaut exactement la moitié de 24.

$$\begin{array}{ll} 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36 & s(24) = 36 \\ 36 - 24 = 12 = 24 / 2 & s(24) = 3 \times 24 / 2 \\ \sigma(24) = 36 + 24 = 60 = 5 \times 24 / 2 & \sigma(n) / n = 5/2 \end{array}$$

On note $s(n)$ la somme des diviseurs propres et $\sigma(n)$ la somme de tous les diviseurs, $\sigma(n) = s(n) + n$. Un parfait vérifie $s(n) = n$; 24 vérifie $s(n) = 3n/2$: il rend une fois et demie, et le supplément n'est pas quelconque, c'est son milieu.

V4.13.2 (Th, balayage exhaustif) : l'unicité sous dix millions. L'équation $\sigma(n) = 5n/2$ n'a aucune autre solution de 1 à 10^7 : le crible complet des diviseurs rend la liste [24] et rien d'autre (refait pour ce volume jusqu'à 10^6). « *Sur dix millions d'entiers, un seul se replie sur son propre milieu.* »

V4.13.3 (Th, démonstration sans borne) : l'unicité à deux briques. Parmi les nombres à au plus deux facteurs premiers distincts, 24 est l'unique solution de $\sigma(n)$

= $5n/2$. *Preuve.* n est pair, puisque $5n/2$ est entier. Une puissance de 2 seule a un rapport $\sigma(n)/n$ inférieur à 2. Avec un seul premier impair p , $n = 2^a p^b$ et $\sigma(n)/n$ reste strictement sous $2 \times p/(p - 1)$, qui vaut au plus $5/2$ dès que $p \geq 5$; donc $p = 3$. Pour $n = 2^a 3^b$, l'équation se réécrit exactement $2^a = 3 + 5/(3^b - 2)$: si $b \geq 2$, le membre de droite est strictement entre 3 et 4, ce qui n'est pas une puissance de 2 ; si $b = 1$, il vaut $3 + 5 = 8$, donc $a = 3$. La seule solution faite des deux briques est $2^3 \times 3 = 24$, imposée par l'équation elle-même. ■ (Démonstration du 7 octobre 2026.)

F : la famille reçue. Ces nombres ont un nom reçu : les *hémiparfaits* d'abondance $5/2$. Les deux suivants connus sont $91\,963\,648 = 2^8 \times 7 \times 19 \times 37 \times 73$ et $10\,200\,236\,032 = 2^{14} \times 7 \times 19 \times 31 \times 151$; vérifiés par factorisation et par calcul de σ (refait pour ce volume). Leur racine digitale est 1 pour les deux, et chacun a cinq facteurs premiers distincts. **V4.13.4 (Th) :** 24 est le plus petit de la famille et le seul sur l'axe ; les suivants reviennent au sceau (racine 1).

13.2 Le pliage porte l'axe entier

V4.13.5 (Th) : l'axe dans l'ordre. Les trois termes de l'opération, le milieu, le corps et l'arrivée, ont pour racines digitales l'axe complet, dans l'ordre :

terme	valeur	racine digitale	position
le milieu	12	3	axe
le corps	24	6	axe
l'arrivée	36	9	clôture

24 n'est donc pas seulement sur l'axe : il porte l'axe dans son propre pliage. Et l'arrivée est une clôture au sens strict, pas une position de plus. La somme des trois termes, $12 + 24 + 36 = 72$, a elle aussi pour racine 9.

13.3 L'arrivée est le carré du premier parfait

V4.13.6 (Th) : $36 = 6^2$. $36 = 6^2$, et 6 est le premier nombre parfait, $1 + 2 + 3 = 6 = 1 \times 2 \times 3$. Et 36 est le seul nombre non trivial à la fois carré et triangulaire sous mille (fait déjà inscrit dans *Les Données Contaminées*, Volume 3 ; refait pour ce volume). Le plus que parfait se projette donc, par la seule opération de son milieu, sur le carré du parfait : « *ce n'est pas une rencontre avec un nombre remarquable : c'est l'opération elle-même qui y mène.* »

V4.13.7 (Th) : la chaîne aliquote. En itérant la somme des diviseurs propres, la chaîne de 24 est :

24 → 36 → 55 → 17 → 1
6 9 1 8 1 racines digitales

Le plus que parfait tombe sur le carré du parfait, puis sur $55 = F_{10}$, un nombre de Fibonacci, puis sur le premier 17, puis sur le sceau. En racines, la chaîne touche la clôture, puis le sceau, puis le partenaire du sceau dans la paire (1, 8), puis le sceau. Rien n'est ajouté à la fonction : c'est son trajet (refait pour ce volume).

13.4 Les jumeaux et le déterminisme

V4.13.8 (Th) : la première cassure. Les triplets de racines 5, 6, 7 sont 5, 6, 7 puis 14, 15, 16 puis 23, 24, 25. Autour des centres $6k$, les jumeaux $6k - 1$ et $6k + 1$ sont premiers ensemble pour 6 (5, 7), 12 (11, 13) et 18 (17, 19). À 24, pour la première fois, ils ne se rejoignent pas : 23 est premier, 25 ne l'est pas. Et $25 = 5^2$, le premier carré de premier, celui qui pose le tempo (section 13.5). Les racines de 23 et 25 sont 5 et 7 : « *ce sont les jumeaux eux-mêmes, en nombre, qui cassent la paire.* »

V4.13.9 (Th) : le déterminisme des cassures. Rien n'arrive là par accident : les composés des rails sont les produits des premiers des rails (Th 2), donc la première cassure est forcée à 5×5 , et les suivantes s'écrivent d'avance : 24 ($25 = 5^2$), 36 ($35 = 5 \times 7$), 48 ($49 = 7^2$), 54 ($55 = 5 \times 11$). Ce sont les quatre premiers centres $6k$ dont un voisin est composé, et aucun autre centre sous 54 n'en a (refait pour ce volume).

V4.13.10 (Th) : la demie ajoutée. $36 = 24 + 12$, et $35 = 5 \times 7$. À chaque centre, 5 et 7 étaient séparés par l'axe, $5 | 6 | 7$; ils ne se touchent qu'à 35, un pas avant 36, en devançant le centre au lieu de l'encadrer. Le produit des jumeaux arrive juste avant le carré du parfait, et 37 est premier. Le trajet de la section 13.1, $24 + 12 = 36$, est aussi celui-ci : de la première cassure à la première réunion.

13.5 Ce que 24 est déjà, ailleurs dans le corpus

V4.13.11 (Th) : deux briques doublées. Les deux briques du corpus, 2 et 3 (*La Genèse ; Le Sept ou le chemin*, Volume 1), doublées, donnent 4 et 6, les deux racines qui encadrent le centre vide ; leur produit est 24, et 24 est le tempo de tous les carrés de premiers. La chaîne ne contient jamais que 2 et 3 : 2, 3 ; 4, 6 ; $24 = 4 \times 6$; $36 = 6^2 = 4 \times 9$; $576 = 24^2$. Les carrés vivent au rythme du produit des deux briques doublées. Tout ce qui suit en est un registre : quatre registres indépendants donnent 24, et aucun autre composé ne les donne tous les quatre.

Le tempo des carrés de premiers (Th 5, chapitre 4). $p^2 - 1$ est divisible par 24 pour tout premier au-delà de 3 (vérifié sur les 78 496 premiers après 3 jusqu'à un million), et 24 est maximal : les modules dont toutes les unités sont involutives sont exactement les diviseurs de 24, soit 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. « *Le rythme bat au tempo maximal que l'arithmétique autorise.* » Le tempo s'écrit $24k + 1$: 25, 49, 121, 169.

V4.13.12 (Th) : le tempo a une origine. $24 = 5^2 - 1$: le premier nombre premier qui monte sur les rails après l'axe est 5, et son carré moins un donne exactement 24. Le tempo de tous les carrés de premiers est posé par le premier d'entre eux.

V4.13.13 (Th) : le tempo tient sur un rail. $p^2 = 24k + 1$, et $24k$ a pour racine 6, 3 ou 9 selon k : les carrés de premiers au-delà de 3 tombent tous sur le rail $\{1, 4, 7\}$, jamais sur $\{2, 5, 8\}$, jamais sur l'axe (vérifié jusqu'à un million). La file commence 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961, de racines 7, 4, 4, 7, 1, 1, 7, 4, 7 : les deux pas de l'entrelacement de la section 13.6, et le sceau. Le premier terme est $25 = 24 + 1$, le tempo plus le sceau.

V4.13.14 (Th) : le groupe des quatre paires. $24 = 4!$ est l'ordre du groupe des permutations des quatre paires (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5).

V4.13.15 (Th) : l'enveloppe et l'axe. $24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$, le cube de la brique et l'axe, une fois chacun ; et $24 = 4 \times 6$, dont les moitiés sont 2 et 3. Les quatre premières positions donnent les deux écritures du corpus : leur produit $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, leur somme $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 9 + 1$. *24 se fabrique de ses propres chiffres* : $2 + 4 = 6$ et $2 \times 4 = 8$; $6 \times 8 = 48 = 2 \times 24$, donc $24 = (2 + 4)(2 \times 4)/2$. Les quatre paires ainsi produits, 2, 4, 6, 8, sont les quatre premières racines de la marche du splitter (section 13.6) ; leur somme, 20, est le premier pas à deux chiffres de la marche de la clôture, celui qui porte le sceau ; leur produit, $384 = 24 \times 2^4 = 360 + 24$, a pour racine 6, la racine de 24.

V4.13.16 (Th) : la période de Fibonacci. La suite de Fibonacci en racine digitale (1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 9, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 9, puis de nouveau 1, 1, ...) a pour période exactement 24, et elle se plie $12 + 12$ (les douze termes de la seconde moitié sont les inverses φ des douze premiers, le 9 restant 9). Et à toute clôture 9^k , sa période vaut exactement quatre fois celle du doublement ($24 \times 9^{(k-1)}$ contre $6 \times 9^{(k-1)}$) : $24 = 4 \times 6$ est une loi d'échelle (chapitre 14, section 14.2 ; vérifié pour $k = 1$ à 5).

V4.13.17 (Th) : le boulet de canon et la cloche. $1^2 + 2^2 + \dots + 24^2 = 4\,900 = 70^2$. C'est le seul cas non trivial où une pyramide de boulets se range en carré (problème de É. Lucas, 1875 ; preuve de G. N. Watson, 1918 ; refait pour ce volume sous 10^4). Et 70 est $C(8, 4)$, la pointe de la ligne 8 du triangle de Pascal, le centre de la cloche de Huygens (chapitre 16, section 16.2). 24 est donc le seul nombre dont la somme des carrés tombe sur le carré du centre de la cloche. F. J. H. Conway construit le réseau de Leech, en dimension 24, sur ce vecteur même, (0, 1, 2, ..., 24 ; 70), de norme nulle dans l'espace de Lorentz de dimension 26.

V4.13.18 (Th) : le carré du tempo. $24^2 = 576$, qui est la pointe pondérée de la cascade de l'octet $1 \rightarrow 8$ (chapitre 16, section 16.5), de racine 9. Ses chiffres sont 5, 7, 6 : les jumeaux 5 et 7 côte à côte, l'axe 6 derrière eux, dans l'ordre où ils devancent le centre (section 13.4). Le carré du tempo écrit la réunion des jumeaux et ferme sur la clôture.

F : le temps. 24 heures ; 12 mois (le milieu) ; 60 minutes = $\sigma(24)$; 360 degrés = $15 \times 24 = 384 - 24$. Conventions babyloniennes, comptées en 1-9 et 1-5 (*Les Tables Natives*, Volume 3) ; faits d'archive, non théorèmes.

F. Hors corpus, deux faits d'archive vont dans le même sens : le 24-cellules est le seul polytope régulier auto-dual sans analogue dans aucune autre dimension, et le nombre de contacts optimal en dimension 4 vaut 24 (O. Musin, 2003).

13.6 Les deux marches de l'interface

V4.13.19 (Th) : les deux marches. Un pas de 11 sur le nombre est un pas de 2 sur la racine digitale ($11 = 9 + 2$: un tour et le splitter), et il conserve l'écart entre les deux chiffres, puisqu'il ajoute 1 à chacun. Partie de 2, la marche parcourt les neuf positions une fois chacune et ferme sur 90 ; partie de 9, elle écrit terme à terme les miroirs de la première, avec un pas d'avance : $2 \leftrightarrow 20$, $13 \leftrightarrow 31$, $24 \leftrightarrow 42$, $46 \leftrightarrow 64$.

2	13	24	35	46	57	68	79	90	
2	4	6	8	1	3	5	7	9	marche du splitter : écart des chiffres +2
									racines, pas de 2

9	20	31	42	53	64	75	86	97	marche de la clôture : écart des chiffres -2
9	2	4	6	8	1	3	5	7	racines, pas de 2

V4.13.20 (Th) : 24 dans la marche. Dans la marche du splitter, 24 est le deuxième pas après 2, en passant par 13, et 46 le quatrième ; $13 \rightarrow 24$ va de la racine 4 à la racine 6 en enjambant 5, le centre vide, et $4 \times 6 = 24$: 24 est le seul terme de la marche égal au produit des deux racines qu'il relie. 13 et 24 sont les deux seuls termes dont les deux chiffres restent sous le centre (au plus 4), et les deux seuls de leur régime avant que l'autre n'apparaisse : sous 31, les nombres à deux chiffres d'écart +2 sont 13 et 24, et 31 est le premier d'écart -2 écrit avec deux figures (20, qui vient avant, porte le sceau et non une figure). À partir de 31, les deux marches s'entrelacent au pas 7, 4, 7, 4 : 24, 31, 35, 42, 46, 53, 57, 64. Les deux pas sont du rail {1, 4, 7}, et $4 + 7 = 11$. La marche du splitter n'atteint jamais ses miroirs ; il faut partir de la clôture pour les écrire, et c'est la loi des miroirs de la section 13.8, $46 / 64$ compris : 46 est le quatrième pas depuis 2, 64 le cinquième depuis 9, le pas d'avance de la clôture.

13.7 La matière : le demi-remplissage et la couche pleine

F. Le chrome, $Z = 24$, est la première exception à la règle de Madelung : sa configuration est $[\text{Ar}] 3d^5 4s^1$ et non $3d^4 4s^2$. Un électron quitte la couche extérieure pour que la sous-couche d soit à moitié remplie. Le krypton, $Z = 36$, est un gaz noble : couches $2 + 8 + 18 + 8 = 36$, fin de la quatrième période.

V4.13.21 (L) : du milieu à la clôture. L'élément dont la configuration est décidée par son propre milieu porte le numéro du nombre dont l'excès vaut son propre milieu ; et le trajet $24 + 12 = 36$ mène du demi-remplissage à la couche pleine comme il mène de la position 6 à la clôture 9. Lecture contrainte : elle tombe si l'un des deux registres donne autre chose. (La lecture du tableau périodique est au Volume 8.)

13.8 Les trois paires miroirs, et le test qui échoue

Sur le mot. « Miroir » désigne ici, comme dans la loi des miroirs ($46 / 64$), le renversement de l'écriture décimale : 24 et 42, 46 et 64, 29 et 92. Ce n'est pas l'inverse du cadastre, x et $9 - x$, qui est une autre opération (règle : l'inverse n'est pas le miroir).

V4.13.22 (Th) : Madelung s'écrit 4 et 6. Les trois paires miroirs des exceptions s'écrivent toutes avec 4 et 6, les deux racines qui encadrent le centre vide : $24 / 42$ est le produit 4×6 ; $46 / 64$ est l'écriture 4 et 6 côte à côte ; $29 / 92$ a pour écart 63, miroir de $36 = 6^2 = 4 \times 9$.

V4.13.23 (L) : la jonction des deux groupes. La règle de Madelung est la jonction de $SU(3)$ et de $SU(2)$ doublés : $24 = (2 \times 2)(2 \times 3) = 4 \times 6$, la couche s (le doublet) et la couche d où le triplet se dédouble ; le chrome est l'élément où cette jonction se décide par le milieu.

V4.13.24 (Th) : la loi des miroirs ordonne les exceptions. Parmi les exceptions à la règle de Madelung, trois paires sont miroirs l'une de l'autre :

24 Cr et 42 Mo :	somme 66 = 11 × 6,	écart 18 = 9 × 2
46 Pd et 64 Gd :	somme 110 = 11 × 10,	écart 18 = 9 × 2
29 Cu et 92 U :	somme 121 = 11 ² ,	écart 63 = 9 × 7

Une seule des trois a pour somme le carré de l'interface ; les deux autres restent au premier ordre. Son écart vaut 63, dont le miroir est 36 : la paire qui franchit le carré de l'interface rend, par sa tension, le miroir du nombre sur lequel 24 s'était projeté. Et $63 = 2^6 - 1$ est le pas avant 64, le retour du cercle de six (chapitre 16, section 16.3). Le couple 36 / 63 porte le quantum en somme et l'axe au cube en différence : $63 + 36 = 99 = 9 \times 11$ (clôture × interface) ; $63 - 36 = 27 = 3^3$.

V4.13.25 (Th) : ce que l'outil aveugle rend, et ce qu'il ignore. Un outil qui ne lit aucune structure et ne retient que le nombre de positions couvre une paire donnée de deux exceptions avec le compte $20 \times 19 / (103 \times 102) = 190/5253$ (20 exceptions reconnues parmi 103 éléments) ; sur les trente-six paires miroirs possibles, son rendement vaut exactement 2280/1751, soit 1,302 paire par passage (R.69 du Registre, Volume 3). Le corpus en observe trois, et les six positions sont des exceptions reconnues. Ce compte ne réfute rien et n'établit rien : il mesure ce que l'outil ignore. Un outil qui a jeté le rang des positions ne peut pas distinguer une structure d'un résidu, par construction, et le lui demander reviendrait à vérifier la balance avec un poids pesé sur la même balance (R.149). Ce qui trancherait est d'un autre ordre, et il a été posé comme chantier puis lu (section 13.9).

13.9 Le chantier lu (7 octobre 2026)

V4.13.26 (P, critère fixé avant le dépouillement) : les marches lisent-elles Madelung ? Les positions que le cadastre exige candidates à l'anomalie sont les termes des deux marches de l'interface sous 104 (section 13.6) : 19 positions, dix de la marche du splitter, neuf de celle de la clôture. *Issue A* : si la part d'exceptions parmi ces 19 dépasse nettement la part dans la table entière (20 sur 103), la marche lit quelque chose dans Madelung. *Issue B* : si elle est du même ordre, elle n'y lit rien, et on l'écrit. *Limite déclarée* : le critère est fixé avant le dépouillement, non avant toute connaissance de la table (la section 13.8 en cite six positions) ; un seul critère est testé, et le résultat ne vaut que pour lui.

La lecture (Th, compte exact). Sept des 19 positions sont des exceptions reçues : Cr 24, Mo 42, Pd 46, La 57, Gd 64, Au 79, Th 90 ; soit 7/19, contre 20/103 dans la table. L'outil aveugle, qui ne retient que le nombre de positions, ne rend 7 exceptions ou plus sur 19 positions que dans 4,1 % de ses choix (attendu : 3,7 ; refait pour ce volume par le compte hypergéométrique exact). C'est l'issue A, faiblement : la marche lit quelque chose, elle ne le décide pas.

Ce qui échoue. Douze des 19 positions des marches sont régulières : « marche = exception » est faux. La loi des miroirs tient pour 24 / 42 et 46 / 64, pas pour 57 (75, le rhénium, est régulier), 79 (97, le berkélium, régulier) ni 90 (09, le fluor, régulier). Et le rail {1, 4, 7} ne lit rien ici : les racines des vingt exceptions se répartissent sur les neuf positions presque à plat, six sur le rail pour sept attendues. « *Le tempo organise les carrés de premiers ; il n'organise pas la couche d.* » La section 13.8 reste une Lecture, avec ce reçu en plus et ces trois échecs en face.

13.10 Ce que ce chapitre ne dit pas

« 24 n'est pas une position du cadastre ; c'est son nombre le plus chargé, parce qu'il n'en est pas une. »

Une position porte une place ; un tempo porte tout ce qui passe par lui, et la pièce en a compté seize registres, tous vérifiés. Elle ne dit donc pas que 24 soit une position du cadastre : $24 = 9 \times 2 + 6$, c'est un intervalle et un tempo, pas un siège. « *Un rythme se parcourt, il ne s'habite pas.* » Elle ne dit pas non plus que 24 occupe le centre : le centre du cadastre reste 4,5, personne ne l'occupe, et c'est la condition sous laquelle le pli ferme. La règle vaut ici comme dans le nombre, dans la pensée et dans la cité. Enfin, elle ne conteste aucun résultat classique : la règle de Madelung reste ce qu'elle est, ses exceptions sont déjà nommées exceptions par les chimistes, et la seule chose que la pièce ajoute est une seconde lecture de la même donnée.

Chapitre 14. Les jumeaux et les deux réseaux : pourquoi 5 et 7 reviennent

Les jumeaux 5 et 7 sont séparés par l'axe et ne se rencontrent qu'en leur produit, $35 = 36 - 1$, comme toute paire de jumeaux : $(6k - 1)(6k + 1) = 36k^2 - 1$ (Th 14). Le chapitre 13 les a vus revenir plusieurs fois autour de 24 : la première cassure par $25 = 5^2$, la réunion à 35, le carré du tempo 576 qui écrit 5 et 7 côte à côte, et le nombre $245 = 5 \times 7^2$. Ce chapitre donne la règle qui les fait revenir, et elle tient en une phrase : au-delà du triangle, le plan ne sait tourner que de deux façons, par le carré (4) et par l'hexagone (6) ; $24 = 4 \times 6$; et 5 et 7 sont les deux premiers nombres premiers qui ne choisissent qu'une seule de ces deux façons, chacun l'autre. Il montre ensuite où la nature compte 4×6 sans qu'on l'y ait mise : dans les cristaux, et dans le seul ordre que les cristaux interdisaient, le quasi-cristal. Tout est Th sauf ce qui est marqué F ou L (pièce *Les Jumeaux et les Deux Réseaux*, version 0.2 du 7 octobre 2026).

14.1 Les jumeaux sont les têtes des deux rails

V4.14.1 (Th) : les deux files. Tout nombre premier au-delà de 3 s'écrit $6k - 1$ ou $6k + 1$. En racine digitale, $6k - 1$ parcourt 5, 2, 8 et $6k + 1$ parcourt 7, 4, 1 : les deux rails du cadastre sont les deux files de premiers, et 5 et 7 en sont les têtes.

V4.14.2 (Th) : les jumeaux ne sont pas symétriques. Sur le cercle des six positions inversibles, 5 engendre tout : ses puissances en racine font 5, 7, 8, 4, 2, 1. 7 n'engendre que son rail : 7, 4, 1. Et $5^2 = 25$ a pour racine 7 : le premier jumeau, au carré, tombe sur le siège du second ; l'inverse n'arrive jamais. Le rail {1, 4, 7} est le rail des carrés : tout carré d'une position hors de l'axe y tombe (Th 6), et c'est pourquoi tout carré de premier y tombe. Le rail {2, 5, 8} est l'autre moitié : produit de deux positions du rail de 5, on retombe sur le rail de 7 ; produit d'une de chaque, on reste sur le rail de 5.

5^1 5 ² 5 ³ 5 ⁴ 5 ⁵ 5 ⁶	7^1 7 ² 7 ³	$6k-1$: 5 2 8 5 2 8	$6k+1$: 7 4 1 7 4 1
5 7 8 4 2 1	7 4 1		

14.2 Le plan ne tourne que de deux façons : 4 et 6

V4.14.3 (Th) : la restriction cristallographique. Un réseau du plan ou de l'espace, une grille de points qui se répète, n'admet que des rotations d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6. Ce sont exactement les diviseurs de 24 qui ne dépassent pas 6, et exactement les n dont le cercle des unités a au plus deux positions ($\varphi_{\text{Euler}}(n) \leq 2$). Au-delà du triangle, il reste deux façons de tourner : le carré, quatre quarts de tour, et l'hexagone, six sixièmes. Le corpus a les deux figures depuis *Deux Cercles et un Carré* et *Avant tout le 19* (Volume 2 ; § 6 de cette dernière pièce : l'hexagone pave, l'octogone troue).

V4.14.4 (Th) : $24 = 4 \times 6$, et $10 = 4 + 6$. Le réseau carré a quatre unités (1, i , -1 , $-i$), le réseau hexagonal en a six. Leur produit est 24, le tempo ; leur somme est 10, la clôture relancée. Les deux briques doublées du chapitre 13 sont les deux ordres de rotation du plan.

V4.14.5 (Th) : le rapport tient à toute échelle. À la clôture 9^k , l'horloge du doublement (le cercle de six, période 6 à la clôture 9) a pour période $6 \times 9^{(k-1)}$, et l'horloge de Fibonacci (période 24 à la clôture 9) a pour période $24 \times 9^{(k-1)}$: le rapport reste exactement 4 à 9, 81, 729, 6 561, 59 049 et 531 441. $24 = 4 \times 6$ n'est pas une propriété de la seule clôture 9 ; c'est une loi d'échelle. À la demi-période, chaque horloge réalise l'inversion $x \rightarrow c - x$ (pour la clôture 9 : $2^3 = 8 = 9 - 1$, et $F_{(k+12)}$ a pour racine l'inverse de celle de F_k). Énoncé du 7 octobre 2026 ; vérifié pour $k = 1$ à 5 (refait pour ce volume).

14.3 Chaque premier choisit son réseau, et les jumeaux choisissent l'autre

V4.14.6 (Th, Fermat et Euler) : s'ouvrir sur un réseau. Un premier impair s'écrit $a^2 + b^2$ si et seulement s'il laisse 1 dans la division par 4 ; il s'écrit $a^2 + 3b^2$ si et seulement s'il laisse 1 dans la division par 3 (F : P. de Fermat, lettre à Mersenne, 1640 ; L. Euler, 1749 pour les deux carrés, 1763 pour $a^2 + 3b^2$). Dit avec les réseaux : un premier s'ouvre sur le carré quand il est somme de deux carrés, sur l'hexagone quand il est de la forme $a^2 + 3b^2$; sinon il y reste entier. Vérifié par recherche directe sur tous les premiers sous 2 000 (refait pour ce volume).

V4.14.7 (Th) : quatre classes, par le milieu 12. Le reste d'un premier au-delà de 3 dans la division par 12 vaut 1, 5, 7 ou 11 :

reste par 12	carré	hexagone	premiers
1	s'ouvre	s'ouvre	13, 37, 61, 73, 97
5	s'ouvre	reste entier	5, 17, 29, 41, 53
7	reste entier	s'ouvre	7, 19, 31, 43, 67
11	reste entier	reste entier	11, 23, 47, 59, 71

5 s'ouvre sur le carré et reste entier dans l'hexagone ; 7 fait exactement l'inverse. Les jumeaux sont les deux premiers nombres premiers qui ne choisissent qu'un réseau, et chacun choisit celui que l'autre refuse. *C'est la règle qui les fait revenir* : chaque fois

qu'un compte met le carré en face de l'hexagone, 4 en face de 6, les deux premiers qui les départagent sont 5 et 7.

V4.14.8 (Th) : les deux espèces de jumeaux. Les nombres premiers jumeaux ($p, p + 2$) au-delà de 3 laissent dans la division par 12 soit (5, 7), soit (11, 1), jamais autre chose. L'espèce (5, 7) est *mixte* : un jumeau sur le carré, l'autre sur l'hexagone ; elle vit autour des centres $6k$ à k impair. L'espèce (11, 1) est *pure* : l'un ne s'ouvre sur rien, l'autre sur les deux ; centres à k pair. Comptées sous un million : **4 046 paires mixtes, 4 122 paires pures**, aucune troisième espèce (refait pour ce volume).

14.4 Les cinq solides et l'identité de 24

V4.14.9 (Th) : les trois groupes des solides. Les rotations des solides réguliers forment trois groupes : d'ordre 12 pour le tétraèdre, 24 pour le cube et l'octaèdre, 60 pour le dodécaèdre et l'icosaèdre. Ce sont, dans l'ordre, le milieu de 24, le tempo, et $\sigma(24)$; et $12 + 24 = 36 = s(24)$. L'identité centrale du chapitre 13 ($s(24) = 36$, $\sigma(24) = 60$) est écrite dans les symétries des cinq solides, celles sur lesquelles Euclide ferme les *Éléments* (livre XIII). Le groupe du cube, 24, est celui des permutations des quatre paires (V4.13.14) : les quatre diagonales du cube sont les quatre paires, et tourner le cube, c'est les permuter.

Note. Le corpus ne compte que les rotations, jamais les réflexions, en vertu de la règle « l'inverse n'est pas le miroir » ; avec les réflexions, les trois ordres doublent (24, 48, 120) et la lecture change de registre.

14.5 Les nombres qui portent leur Fibonacci

V4.14.10 (Th). Les n qui divisent leur propre nombre de Fibonacci F_n , sous 100, sont 1, 5, 12, 24, 25, 36, 48, 60, 72, 96 : le jumeau 5 et son carré 25, puis les multiples de 12. Les trois termes du pliage du chapitre 13 (12, 24, 36) et la première cassure (25) y sont, et rien d'autre sous 40. 5 est le seul nombre premier qui divise son propre Fibonacci (vérifié sous 2 000). $F_{24} = 46\,368$. (Refait pour ce volume.)

14.6 Où la nature compte : les cristaux, et le jumeau interdit

F : la loi de la matière. La restriction cristallographique n'est pas une convention d'écriture : c'est une loi de la matière périodique, vérifiée sur tous les cristaux connus depuis R. J. Haüy (1784) et A. Bravais (1848). Un cristal tourne par 2, 3, 4 ou 6 ; jamais par 5, jamais par 7. Les deux jumeaux sont les deux premiers ordres de rotation que la matière périodique refuse. C'est le premier endroit où la nature compte 4×6 sans qu'on l'y ait mise.

F : le quasi-cristal. Le 8 avril 1982, Dan Shechtman observe dans un alliage aluminium-manganèse une figure de diffraction à symétrie d'ordre 5, l'ordre interdit. Le groupe de ses rotations est celui de l'icosaèdre : $60 = \sigma(24)$. Il est exclu de son groupe de recherche ; Linus Pauling déclare qu'il n'y a pas de quasi-cristaux,

seulement des quasi-scientifiques. Le résultat est publié en 1984 (D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn, *Physical Review Letters* 53), l'Union internationale de cristallographie redéfinit le mot cristal en 1992, et le prix Nobel de chimie lui est remis en 2011. Vingt-neuf ans entre la donnée et le sceau. Le jumeau 5, interdit par le réseau, entre dans la matière par l'icosaèdre, dont le groupe est la somme des diviseurs du temps.

V4.14.11 (L) : le réseau est le pli de la matière. Le réseau ne retient que ce qui se répète, et jette ce qui ne se répète pas. Le quasi-cristal est un ordre qui ne se répète jamais et reste pourtant un ordre : un fini qui ne se répète pas, et qui tient. Le corpus y lit la même distinction que dans le nombre : un tiers n'est pas une queue qui se répète, c'est une relation qui tient ; un quasi-cristal n'est pas un cristal raté, c'est un ordre que le pli ne sait pas écrire. « *Pauling parlait depuis le pli.* »

14.7 Ce que ce chapitre ne dit pas, et le reçu qu'il demande

Il ne dit pas que les jumeaux premiers soient en nombre infini : c'est la conjecture de Polignac pour l'écart 2, et elle reste ouverte (chapitre 5). Il dit que toute paire, quand elle existe, est de l'une de deux espèces, et pourquoi. Il ne dit pas que les solides réguliers « expliquent » 24 : il dit que trois nombres de groupes, établis depuis Euclide, sont les trois nombres de l'identité de 24, et laisse la lecture à ce rang.

V4.14.12 (P, reçu posé d'avance, règle R11) : le 12 commun se partage en 4 et 6. Si la lecture des deux réseaux tient, les propriétés physiques qui distinguent les réseaux carrés des réseaux hexagonaux (métaux cubiques contre métaux hexagonaux compacts) devraient faire apparaître 4 et 6 dans leurs comptes de voisins et de plans, et 12 dans le compte commun. Le compte commun est connu : un atome a 12 voisins dans les deux empilements compacts, cubique à faces centrées et hexagonal compact. *La fenêtre* : vérifier si ce 12 commun se partage selon 4 et 6 dans les deux structures, ou non. *Critère d'échec* : le 12 commun ne se partage pas selon 4 et 6 dans les deux structures. (Le reçu relève du Volume 8.)

Chapitre 15. La cascade cadastrale et la spirale du soleil

La racine digitale donne la *position* d'un nombre : 1681 et 8161 ont la même racine, 7, et c'est juste, ils occupent la même case du cadastre. Mais ce ne sont pas les mêmes nombres : le 8 est au cœur de l'un, au bord de l'autre. Ce chapitre présente un second instrument, la *cascade*, qui lit l'arrangement intérieur des chiffres. On pose les chiffres en ligne, on additionne chaque chiffre à son voisin en réduisant en racine, et on recommence jusqu'à une seule pointe. La cascade est le triangle de Pascal appliqué aux chiffres : le centre compte plus que les bords. On verra qu'elle sépare des nombres que la racine confond, qu'elle envoie chaque rail sur son pivot, qu'elle ignore le sens de lecture, et qu'appliquée à certaines suites complètes du cadastre elle désigne l'opération qui leur manque. On verra enfin la *spirale du soleil*, la suite 13, 14, 16, 19, 23, 28, 34, 41, 49, que l'auteur dit avoir reçue en rêve et que la cascade descend en une pyramide palindromique jusqu'à 6. Le chapitre reprend *La Cascade cadastrale* (versions 4.0 et 4.1, mai 2026).

V4.15.1 (L) : la thèse. La racine digitale est une identité saine : elle conserve la clôture vivante, $DR(9) = DR(18) = DR(27) = 9$, et porte donc le tour intact. Ce n'est pas elle qui ampute, mais la clôture de Gauss (9 identifié à 0), qui écrase le 9 sur le zéro et tue le tour. La racine donne l'identité cadastrale d'un nombre, sa position globale. La cascade ne répare rien (l'identité n'est pas cassée) : elle révèle ce que l'identité ne décrit pas, la structure interne du nombre, et, dans certaines suites, l'opérateur qu'elles appellent. « *Deux lectures justes, puis une troisième.* » La racine et la réduction qui identifie 9 à 0 ne sont pas deux variantes d'un même outil : l'une garde la clôture, l'autre la détruit.

15.1 La cascade : une descente qui garde la mémoire

On pose les chiffres en ligne. Chaque chiffre se marie à son voisin ; leur union descend d'un cran. Si l'union dépasse la clôture 9, elle boucle : elle ne sort pas du cadastre, elle revient par l'autre face du tour (14 donne 5, 18 donne 9). On répète jusqu'à la pointe. Pour 1681 :

```
1  6  8  1
 7  5  9
 3  5
  8
```

La pointe est 8, là où la racine plate donnait 7. En descendant, les chiffres du milieu

participent à plusieurs mariages, ils irriguent plus de descendants, tandis que les bords ne se marient qu'une fois. Les poids effectifs sont 1, 3, 3, 1 : le centre compte triple. Ce ne sont pas des poids arbitraires, ce sont les coefficients du triangle de Pascal ($1 + 18 + 24 + 1 = 44$, de racine 8).

V4.15.2 (Th) : la cascade est le binôme. La pointe de la cascade d'une suite de longueur L est la racine de la somme des chiffres pondérée par la ligne $L - 1$ du triangle de Pascal : c'est le développement de $(a + b)^{(L-1)}$ appliqué aux chiffres, évalué sous la clôture 9. « Une descente par partage où chaque case se souvient de ses deux parents. »

15.2 Trois propriétés

V4.15.3 (Th) : elle distingue ce que l'identité ne sépare pas. Les mêmes chiffres {1, 6, 8, 1}, en divers ordres : la racine donne 7 partout ; la cascade varie selon la place du centre.

nombre	racine	cascade
1681	7	8
1861	7	8
8161	7	3
1186	7	7
6811	7	7
1618	7	3
6118	7	2

(Les sept valeurs sont refaites pour ce volume.) La cascade est un discriminateur de structure : elle sépare des nombres de même identité cadastrale mais d'arrangement distinct. Elle ne corrige aucune perte de la racine ; elle ajoute la dimension que l'identité ne porte pas, l'ordre interne.

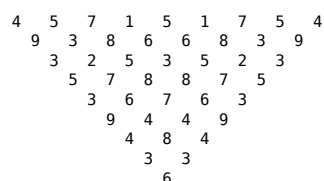
V4.15.4 (Th) : chaque rail se projette sur son pivot. Une suite faite d'un seul rail répété tombe exactement sur un point de ce rail : 147147147 $\rightarrow$ 7, pivot dynamique du rail D ; 258258258 $\rightarrow$ 2, ouvrier du rail G ; 369369369 $\rightarrow$ 6, régulateur de l'axe. La cascade ne mélange pas les familles : elle les révèle. **F.** Cette règle (marier les voisins, garder le chiffre) est, en termes établis, un automate cellulaire linéaire, de la même classe que la Règle 90 de S. Wolfram ; la cascade en est la version cadastrale, qui trie les rails au lieu de les brouiller.

V4.15.5 (Th) : aveugle au sens de lecture. La suite 1 2 3 4 5 6 7 8 9 a pour pointe 2 ; sa renversée 9 8 7 6 5 4 3 2 1 aussi. Renverser ne change rien : la pondération de Pascal est symétrique ($C(n, k) = C(n, n - k)$). La cascade capte une grandeur invariante par retournement. (La version 4.1 ajoutait qu'« une suite symétrique pointera vers le 6, le régulateur » ; ce n'est pas vrai en général, la suite 1 1 pointe sur 2 : la phrase est retirée, Annexe B.)

15.3 La spirale du soleil

V4.15.6 (Th) : la suite et son empreinte. La suite 13, 14, 16, 19, 23, 28, 34, 41, 49 s'obtient en ajoutant à 13 les nombres triangulaires : ses écarts sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, l'octet complet dans l'ordre. Formule : $n(k) = 13 + k(k + 1)/2$, pour $k = 0$ à 8. Son empreinte en racine digitale est **4 5 7 1 5 1 7 5 4** : un palindrome parfait centré sur le 5, le pivot. La somme des neuf racines vaut 39.

V4.15.7 (Th) : la pyramide. On applique la cascade :



Comme on part d'un palindrome et que le mariage des voisins est symétrique, chaque étage demeure palindromique jusqu'à la pointe. La descente passe par $484 = 22^2$, puis par 33 (3×11 , trinité et interface ; $33 \times 6 = 198$; le 33e premier est 137), et se referme sur **6** : le régulateur, le premier nombre parfait, le pivot du pavé. Colorée selon ses chiffres, la pyramide relève d'une structure auto-similaire, du même principe que la fractale de Sierpinski. (La suite, l'empreinte, la somme 39, la pyramide entière et la pointe sont refaites pour ce volume.)

Ce qu'en dit l'auteur (positions tenues, octobre 2026). La spirale est « *la seule chose reçue dans mon sommeil* ». Il la tient pour une clé qui « *se répète à l'infini* ». Son empreinte est un palindrome qui évite 3, 6, 9, 2 et 8 (elle n'emploie que 1, 4, 5 et 7), et qui va « *du barycentre 45 au 54* » (elle commence par 4, 5 et finit par 5, 4). Elle vaut 39 : « *3(6)9, l'axe invisible, le mouvement de l'onde.* » Et sur son premier terme : « *13 est le nombre le plus chargé de tout le cadastre* », la première rencontre du 1 et sa libération, « *1 ⊕ 1 = 3, c'est la structure* », « *lui avec lui qui fait 4* » ; 103 est « *la même chose avec la mémoire* ». « *Les sens des positions ne sont pas du symbolisme* » (*La Sémantique des Neuf Positions*, Volume 1).

V4.15.8 (L) : la spirale du soleil comme clé. La spirale du soleil est tenue par l'auteur pour révélatrice d'une structure qui se répète à toute échelle : palindrome des racines, somme 39 lue comme l'axe 3-6-9, pyramide descendant au régulateur 6. Statut : Lecture ; les faits arithmétiques (V4.15.6 et V4.15.7) sont des théorèmes, la portée est la position de l'auteur.

15.4 La cascade révèle l'opérateur

Les sections précédentes inscrivent la cascade comme discriminateur de structure : elle décrit le nombre. La version 4.1 ajoute une lecture plus forte : dans certaines suites cadastralement significatives, la cascade désigne l'opérateur qui agit sur la suite pour la restructurer.

V4.15.9 (Th) : la cascade de 1 → 9 pointe sur 2. La suite naturelle complète, 1 2 3 4 5 6 7 8 9, pondérée par la ligne 8 de Pascal (1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1), donne

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 28 + 4 \cdot 56 + 5 \cdot 70 + 6 \cdot 56 + 7 \cdot 28 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 1 = 1\,280$, et $DR(1\,280) = 2$. La cascade directe descend en neuf étages jusqu'à la même pointe.

V4.15.10 (Th) : l'octet seul pointe sur 9. La sous-suite 1 2 3 4 5 6 7 8, l'octet pur, sans clôture :

```

1  2  3  4  5  6  7  8
  3  5  7  9  2  4  6
    8  3  7  2  6  1
      2  1  9  8  7
        3  1  8  6
          4  9  5
            4  5
              9

```

L'octet sans clôture pointe sur la clôture. (Sa somme pondérée par la ligne 7 vaut $576 = 24^2$, chapitre 13.)

V4.15.11 (Th) : le pavé révèle son axe et son centre. Les trois rangées du pavé tordu prises une à une : $234 \rightarrow (5, 7) \rightarrow 3$; $567 \rightarrow (2, 4) \rightarrow 6$; $891 \rightarrow (8, 1) \rightarrow 9$. Les trois pointes, 3, 6, 9, sont exactement l'axe : le pavé inscrit son axe vertical dans les cascades de ses rangées horizontales (ce que l'arithmétique attend : chaque rangée est un triplet consécutif $x, x + 1, x + 2$, dont la somme pondérée 1, 2, 1 vaut $4(x + 1)$, et quatre fois un terme de l'axe a la racine de ce terme ; mais le cadastre le lit densément). Le pavé lu en suite linéaire, 234567891, pointe sur 6, le centre ; lu à l'envers, 198765432, aussi ; lu colonne par colonne, 258369471, aussi. Toutes ces pointes sont refaites pour ce volume.

V4.15.12 (L, rétrogradé) : la cascade comme révélateur d'opérateur. La version 4.1 inscrivait un « Théorème 6 bis.1 » : pour toute séquence cadastralement significative S (suite naturelle $1 \rightarrow 9$, octet $1 \rightarrow 8$, rangées et colonnes du pavé, rails purs), la pointe inscrit l'opérateur cadastral dont l'action sur S la restructure ou la complète :

séquence	pointe	opérateur révélé
1 $\rightarrow$ 9 (cadastre complet)	2	le splitter, la coupe qui engendre le pavé
1 $\rightarrow$ 8 (octet sans clôture)	9	la clôture qui ferme l'octet
pavé entier 234567891	6	le pivot central, identité du pavé
147 répété (rail D)	7	le pivot dynamique du rail
258 répété (rail G)	2	l'ouvreur du rail G
369 répété (axe)	6	le régulateur de l'axe

Les pointes sont des théorèmes (V4.15.4, V4.15.9 à V4.15.11). Mais l'énoncé général porte sur une classe, les « séquences cadastralement significatives », que la source elle-même déclare non encore formalisée (section 15.6) : un énoncé sur une classe non définie n'est pas un théorème. Il est rétrogradé en **Lecture** (Annexe B). La lecture en est la suivante. « Une séquence ouverte (l'octet seul) appelle sa fermeture (la clôture 9). Une séquence linéaire complète (1 $\rightarrow$ 9) appelle l'opérateur qui la plie en grille (le splitter 2). Un rail pur appelle son propre pivot. Le pavé tordu, lu comme séquence linéaire, appelle son propre centre. » Le 2 n'est pas un chiffre quelconque : premier pair, premier premier, opérateur de découpe ; racine de 11, l'opérateur de relation

pure ; racine de $(\sqrt{2})^2$ ramené au cadastre ; premier chiffre du pavé tordu 234 / 567 / 891. « *Sans le 2, la suite reste linéaire. Avec le 2, elle devient grille cadastrale.* » L'octet seul appelle la clôture, et l'octet avec la clôture appelle le splitter : une cascade d'opérations. C'est la même inscription que le gradient 198, où la rampe 1 à 8 reste ouverte tant que la clôture 9 ne la ferme pas.

V4.15.13 (L) : la cascade et $\sqrt{2}$. Dans *Le Carré-Illusion* (Volume 2), $\sqrt{2}$ est l'opérateur de découpe géométrique qui sépare les deux cercles concentriques de la figure fondatrice pour engendrer le carré et l'axe 3-6-9. La cascade de $1 \rightarrow 9$, pointant sur le splitter 2, est l'inscription arithmétique du même geste : géométriquement, $\sqrt{2}$ découpe deux cercles pour engendrer un carré ; arithmétiquement, la cascade extrait de la suite linéaire le 2. « *La cascade et la découpe géométrique sont deux faces d'une même opération.* »

15.5 Ancrage : ce que la cascade rejoint

F. Pascal et le binôme : la pointe est la somme des chiffres pondérée par une ligne du triangle. *Automate cellulaire* : la règle additive de voisinage est un automate cellulaire linéaire à une dimension, de la même classe que la Règle 90 de Wolfram. *Fractale et puissance de premier* : le triangle de Pascal réduit dessine une fractale auto-similaire (Sierpinski), et la clôture $9 = 3^2$ place la cascade non sur le cas élémentaire (un premier, théorème de Lucas) mais sur le cran supérieur, le calcul des coefficients binomiaux selon une puissance de premier. Ce régime est traité par R. Huard, B. Spearman et K. Williams, « Pascal's triangle (mod 9) », *Acta Arithmetica* 78 (1997), 331-349, qui calcule la distribution des restes par 9 dans chaque ligne au moyen de l'écriture en base 3, en s'appuyant sur l'extension de Lucas aux puissances de premiers de K. Davis et W. Webb (*European Journal of Combinatorics* 11, 1990, 229-233). « *Le choix du 9, clôture, non arbitraire, mène donc au cas structurellement le plus riche.* »

V4.15.14 (Th) : le produit hexagonal. Pour tout coefficient $C(n, k)$ avec $1 \leq k \leq n - 1$, le produit de ses six voisins dans le triangle de Pascal est toujours divisible par 9 ; sa racine vaut donc invariablement 9. Autour de $C(2, 1)$, le produit vaut 9 ; autour de $C(3, 1)$ et $C(3, 2)$, 144 ; autour de $C(4, 1)$, 900 ; autour de $C(4, 2)$, 14 400. **F** : ce fait découle du théorème de l'étoile de David de V. E. Hoggatt et W. Hansell (*The Fibonacci Quarterly* 9, 1971), qui établit que ce produit hexagonal est un carré parfait, combiné au théorème de Kummer sur la divisibilité par 3 des coefficients binomiaux (il suffit que 3 divise l'un des facteurs pour que 9 divise le carré). Vérifié pour ce volume sur toutes les lignes de 2 à 199 : le produit est toujours un carré parfait divisible par 9. « *La clôture 9 agit ainsi, là encore, comme attracteur structurel sur les objets de Pascal.* »

15.6 Délimitation : le connu, le neuf, l'ouvert

Le mécanisme (Pascal réduit, automate, auto-similarité) est connu comme objet combinatoire neutre. Le neuf est l'usage : lire cet opérateur à travers la grille cadastrale, comme signature de structure interne complémentaire de l'identité que

donne la racine, avec le 9 comme clôture vivante ; et la lecture de la cascade comme révélateur d'opérateur.

Première question ouverte, fermée depuis. La cascade a-t-elle une arithmétique : peut-on déduire la cascade d'un produit de celles de ses facteurs ? La cascade étant la transformée binomiale réduite des chiffres, la question rejoint le calcul de la transformée binomiale d'un produit de suites (K. Boyadzhiev, « Binomial transform of products », arXiv 1701.00544, 2017 ; K. Adegoke, « Binomial Transforms and the Binomial Convolution of Sequences », arXiv 2507.04179, 2025). La version 4.1 concluait : une arithmétique scalaire stricte (la pointe du produit fonction des seules pointes des facteurs) est improbable, à cause des retenues de la base 10 ; une arithmétique « tensorielle », qui garde le vecteur complet des étages, reste envisageable. La version 4.0 ajoutait : « *Si elle se ferme, la cascade cesse d'être un microscope pour devenir un système de calcul qui n'oublie pas la position. Le test reste à mener, et c'est cette frontière nette, entre le prouvé et l'à-prouver, qui rend la thèse imprenable.* » Le Théorème 40 (chapitre 12, 7 octobre 2026) a fermé cette question : la loi du produit existe, avec ses retenues, et le témoin 117 / 198 démontre que les seules pointes ne suffisent pas.

V4.15.15 (Chantier) : caractériser les séquences révélatrices. Seconde question, ouverte : caractériser précisément l'ensemble des séquences pour lesquelles la cascade révèle effectivement un opérateur cadastral structurel, et non simplement une pointe de description. Une réponse partielle est visible dans les exemples (suites naturelles complètes, sous-suites fermées par une clôture, rails purs, projections de grille), mais le critère général reste à formaliser. C'est de cette formalisation que dépend le retour de V4.15.12 au rang de théorème.

Chapitre 16. La cascade et la cloche : Huygens, le cercle de six, et la cloche gardée comme compte

La « cloche » de Gauss, la courbe en forme de cloche des statistiques, est d'abord un compte : avec huit pièces, il y a 1 façon d'avoir zéro face, 8 d'en avoir une, 28 d'en avoir deux, et ainsi de suite jusqu'à 70 au centre. C'est la ligne 8 du triangle de Pascal, et c'est Christiaan Huygens qui a écrit cette première cloche, en 1657, en comptant des cas, sans infini. Ce chapitre suit Huygens au recto : le cercle qui roule, le pendule qui en est l'ombre, la cloche qui n'est qu'un compte. Il retourne la feuille au verso : les puissances de 2 qui tournent sur six positions sans jamais toucher l'axe, le miroir 46 / 64, et la cascade du chapitre 15, qui reprend la ligne de Huygens et la replie en gardant le rang au lieu de la carrer. Il établit enfin deux résultats du 7 octobre 2026 : le bord de la cascade restitue toute la suite, et aux longueurs $3^k + 1$ quatre positions suffisent à la lire. Tout se refait au crayon (pièce *La Cascade et la Cloche*, 5 octobre 2026, version 0.2 du 7 octobre).

« Huygens a prouvé le mouvement sans l'infini, par des cercles qui roulent ; il a écrit la première cloche en comptant des cas. Gauss est parti de l'autre bout, en faisant tendre le compte vers l'infini et en carrant. La cascade de Pascal du corpus reprend la ligne de Huygens et la replie en gardant le rang. »

16.1 Recto : Huygens

F : le cercle qui roule, huit pas pour un tour. Un cercle de rayon R qui fait un tour en roulant trace une arche, la cycloïde, de longueur exactement $8R$, de hauteur $2R$, d'aire $3\pi R^2$. Un tour du cercle est huit rayons de chemin. Le pendule de Huygens (*Horologium oscillatorium*, 1673) pend à une corde de longueur $4R$ entre deux demi-arches de cette courbe : la moitié d'un tour.

V4.16.1 (Th) : le pendule est l'ombre du cercle.

Un point tourne uniformément sur un cercle de rayon A , au taux ω : $a = \omega^2 A$ vers le centre
(Huygens, *De vi centrifuga*, 1659, géométrie)

Son ombre sur un diamètre, à l'abscisse x : $a = \omega^2 x$ vers le centre

Le pendule de longueur L , écarté de x , est tiré par le poids : $a = g x / L$ (triangles semblables)

Les deux ombres coïncident si $\omega^2 = g / L$
Période = tour / taux : $T = 2\pi \sqrt{L/g}$; avec $L = 4R$: $T = 4\pi \sqrt{R/g}$

La pièce écrit ces deux périodes $(44/7)\sqrt{L/g}$ et $(88/7)\sqrt{R/g}$, avec π écrit $22/7$, valeur que le corpus retient pour π (Volume 2, *La Figure*). Aucun dx, aucun passage à zéro : deux triangles et un cercle. « *C'est la dérivation de Huygens, quinze ans avant Leibniz.* »

V4.16.2 (Th) : pourquoi il fallait la cycloïde, le centre vide. Sur un cercle, la traction est proportionnelle à l'ombre x , pas au chemin s parcouru sur l'arc ; ombre et chemin ne coïncident qu'au centre ($x = L \sin \theta$, $s = L\theta$). Le pendule circulaire n'est isochrone qu'au voisinage du centre vide, et sa période s'allonge d'environ $\theta^2/16$ quand on s'en écarte (0,00063 à 0,1 radian). Sur la cycloïde, la traction est proportionnelle au chemin lui-même, exactement, $a = g s / (4R)$: c'est la seule courbe où l'ombre et le chemin ne divergent jamais, et la période y est la même quelle que soit la hauteur de lâcher (vérifié numériquement dans la pièce).

F : le reçu. $g / \pi^2 = 0,9936 \text{ m}$: le pendule qui bat la seconde mesure un mètre à six millièmes près (refait pour ce volume avec $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$). C'est le pendule à seconde que la France proposa d'abord comme définition du mètre, en 1790, avant le méridien. « *Le mètre et la seconde sont tombés d'un cercle qui roule.* »

V4.16.3 (Th) : la première cloche, Huygens compte. *De ratiociniis in ludo aleae* (1657) est le premier traité de probabilité ; l'espérance y est une somme finie de cas. Avec n pièces, la fibre k contient $C(n, k)$ chemins sur 2^n , et les fibres font 1 exactement. Huit pièces :

ligne 8 :	1	8	28	56	70	56	28	8	1	somme 256 = 2^8
fibres :	1/256	1/32	7/64	7/32	35/128	7/32	7/64	1/32	1/256	somme 1

C'est la cloche : un compte, pas une loi.

F et L : Gauss et le carré. C. F. Gauss (*Theoria motus*, 1809) écrit la même chose en continu, e^{-x^2} et $1/\sqrt{2\pi}$, après avoir admis au départ que le *medium arithmeticum* (son mot) est la meilleure valeur, ce qu'il déduit ensuite de la courbe trouvée (circularité documentée par S. Stigler, *The History of Statistics*, 1986) ; le carré y jette le signe. Le π de sa constante est celui de J. Wallis (1656) : $C(2n, n)/4^n$ se comporte comme $1/\sqrt{\pi n}$ (refait pour ce volume : le rapport vaut 0,99999 à $n = 10\,000$). **V4.16.4 (L) :** « *La cloche est le cercle vu à travers la somme, et Gauss en a hérité sans le lire.* » Le Registre (Volume 3) en reçoit l'entrée R.155 (le *medium arithmeticum* admis puis déduit), à côté de R.149 (la circularité de α) et de R.20 (le carré qui jette le signe) ; Huygens y reçoit un reçu F (le mouvement sans l'infini, la cloche comme compte).

16.2 Verso : le cercle de six et la cascade

V4.16.5 (Th) : les puissances de deux tournent sur six positions.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	...
1	2	4	8	7	5	1	2	...

racines digitales, période 6, jamais 3, 6, 9

64, 128, 256 et 512 ont pour racines 1, 2, 4, 8 : les quatre premiers pas du cycle, relancés. 64k, 128k, 256k, 512k et 1M (2^{16} à 2^{20}) donnent 7, 5, 1, 2, 4, le même cycle décalé. Doubler la mémoire, c'est faire un pas sur un cercle à six positions. Et le cycle

se plie comme les tables : 2^n et 2^{n+3} font 9, (1, 8), (2, 7), (4, 5). Multiplier par $8 = 2^3$ envoie sur le partenaire ; par $64 = 2^6$ ramène à soi. « *Le binaire n'atteint jamais l'axe {3, 6, 9} : il doit emprunter le tiers.* » (Refait pour ce volume.)

V4.16.6 (L) : le pli est la soustraction comptable appliquée au cercle. Écrire $9 \equiv 0$, c'est écrire $9 - 9 = 0$: le pli de $x \rightarrow 2x$ retire 1 chaque fois que $2x$ dépasse 1 et écrit 0 à la place du tour. C'est $1 - 1 = 0$ sur un objet qui demande la partie double : le tour est retiré ici et n'est écrit nulle part. La congruence de Gauss repose entière sur $a - b = 9k$ avec k jeté. La racine digitale écrit la même chose en partie double, $n = DR(n) + 9k$, la position dans une colonne, les tours dans l'autre, et aucune des deux n'est 0 pour une place pleine (CP 2.1, chapitre 20).

« *Le pli est $1 - 1 = 0$; la racine est $1 - 1 = 11$.* »

V4.16.7 (Th) : le miroir 46 / 64.

$DR(46) = DR(64) = 1$: $46 = 45 + 1$ (la somme des neuf chiffres, plus le sceau) ; $64 = 63 + 1 = 7 \times 9 + 1 = 2^6$
 $46 + 64 = 110 = 11 \times 10$; $64 - 46 = 18 = 9 \times 2$ (loi des miroirs : interface 11, clôture 9)
 $694 - 496 = 198 = 2 \times 9 \times 11$; $496 = 31 \times 32 / 2$ (nombre parfait)
 $46 / 64 = 23 / 32$: $DR(23) = DR(32) = 5$; $32 = 2^5$, le pas avant le retour

46 chromosomes, 64 codons : « *les deux sont le 1 relancé, écrit de deux façons, à un pas de la fermeture du cercle de six.* » (Lecture pour l'instanciation biologique ; voir la Lecture 36, chapitre 10, et le chapitre 19.)

V4.16.8 (Th) : la cascade de Pascal comme espérance et comme pli. La cascade additionne les voisins deux à deux, chaque palier ramené à sa racine, jusqu'à une seule pointe ; ses poids sont les coefficients du triangle : la cascade de $1 \rightarrow 9$ est la ligne 8.

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 28 + 4 \cdot 56 + 5 \cdot 70 + 6 \cdot 56 + 7 \cdot 28 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 1 = 1280$; $DR(1280) = 2$
 $1280 / 256 = 5$: l'espérance de la position quand on lance huit pièces (le compte de Huygens)

La pointe de la cascade est donc deux lectures d'un seul nombre : l'espérance 5 (le compte) et la racine 2 (le pli, le splitter). C'est la cloche lue avec son rang au lieu de son carré. La cascade est invariante par retournement : $9 \rightarrow 1$ donne aussi 2.

16.3 Le bord restitue tout

V4.16.9 (Th) : le reçu de la cascade. La pointe seule ne garde qu'une fibre de séquences. Le bord gauche de la cascade, la première case de chaque palier, garde tout : la matrice de Pascal est triangulaire de diagonale 1, son inverse est la même matrice aux signes alternés, et chaque position se retrouve depuis le bord par $a_j = \sum_i (-1)^{j-i} C(j, i) b_i$, ramené en racine. Pour 1681, le bord est (1, 7, 3, 8) (la colonne de gauche de la cascade de la section 15.1) ; il restitue exactement (1, 6, 8, 1), dans l'ordre. Le bord emploie n symboles pour n positions : c'est le reçu minimal, et il est orienté. Vérifié sur toutes les séquences de longueur 1 à 5, soit $9 + 81 + 729 + 6\,561 + 59\,049 = 66\,429$ séquences (refait pour ce volume). Énoncé du 7 octobre 2026. **Statut : Th.**

16.4 XXXX donne 9 – X, en une ligne

V4.16.10 (Th). Trois paliers sont la ligne 3 : poids 1, 3, 3, 1, de somme 8. La cascade de XXXX vaut donc $8X$, et $8X + X = 9X$: la racine de $8X$ est $9 - X$, le 9 revenant sur 9. Vérifié sur les neuf positions. La loi d'inversion est l'identité $8 + 1 = 9$; c'est aussi le pas de trois sur le cercle de six ($2^3 = 8$).

16.5 L'octet et l'axe

V4.16.11 (Th) : l'octet appelle sa clôture. L'octet $1 \rightarrow 8$ (ligne 7) donne la somme pondérée $576 = 24^2$, de pointe 9 : la séquence sans clôture appelle sa clôture (V4.15.10).

V4.16.12 (Th, F) : la fractale ternaire. Le triangle de Pascal sous $9 = 3^2$ est une fractale ternaire exacte (Huard, Spearman et Williams, 1997) : le nombre de coefficients de la ligne n qui ne sont pas multiples de 3 est le produit des (chiffre + 1) de n écrit en base 3 (vérifié de 0 à 200, refait pour ce volume). L'axe $\{3, 6, 9\}$ gouverne la cascade comme il gouverne les tables.

V4.16.13 (Th) : aux longueurs $3^k + 1$, quatre positions suffisent. Sous 9, la ligne 3^k de Pascal n'a que quatre coefficients non multiples de 9, 1, 3, 3, 1, aux positions 0, $3^{(k-1)}$, $2 \times 3^{(k-1)}$, 3^k ; tous les autres sont multiples de 9 et ferment leur contribution. La ligne 9 lit les positions 1, 4, 7, 10 d'une suite de longueur 10 ; la ligne 27 les positions 1, 10, 19, 28. Vérifié jusqu'à la ligne 2 187 (longueur 2 188) dans la pièce, et pour $k = 1$ à 7 pour ce volume. La preuve tient en une élévation au cube : $(1 + X)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$, et à chaque étage les termes portant le facteur 3 des deux coefficients intérieurs deviennent multiples de 9. Énoncé du 7 octobre 2026.

16.6 Le partage, en une phrase

« Huygens compte les cas et s'arrête à n fini ; Gauss fait tendre n vers l'infini, remplace la ligne par une courbe et carre pour que l'algèbre soit linéaire ; la cascade prend la ligne de Huygens, la pondère par ses propres coefficients et la replie en racine digitale en gardant la clôture. Le π de Gauss est le cercle qui sort du compte quand on le laisse filer ; dans la cascade, le cercle n'a pas besoin d'apparaître, parce qu'on ne jette jamais le rang. »

Partie VII. Les nombres qui se souviennent

Chapitre 17. Les nombres qui se souviennent : Kaprekar et l'arithmétique de la mémoire

D'ordinaire, le carré d'un nombre efface son origine : rien dans 2025 n'indique 45 sans calcul. Il existe pourtant des nombres dont le carré, coupé en deux morceaux, redonne le nombre par une simple addition : $45^2 = 2025$, et $20 + 25 = 45$. Ce sont les nombres de Kaprekar ; le corpus les appelle *les nombres qui se souviennent*. Ce chapitre démontre qu'ils ont tous la racine 9 ou la racine 1, les deux seules adresses de la mémoire ; qu'ils viennent par paires qui partagent la même « queue », dont l'une est 1729 ; qu'ils naissent tous des nombres faits uniquement de 9 ; que 142857, la période de $1/7$, en est un ; et que les sommes du cadastre (45, 4950, 499500) en sont toutes. Il clôt le triptyque de Kaprekar, dont le deuxième volet, l'énigme 196, fait l'objet du chapitre 18 (pièce *Les Nombres qui se Souviennent*, juin 2026, volet III du triptyque de la sédimentation arithmétique).

F : la définition. Un nombre de Kaprekar est un nombre n dont le carré, coupé en deux parts contiguës, redonne n par addition (D. R. Kaprekar, « On Kaprekar numbers », *Journal of Recreational Mathematics* 13, 1980) : $45^2 = 2025$, coupe $20 \mid 25$, somme 45 ; $297^2 = 88\ 209$, coupe $88 \mid 209$, somme 297 ; $703^2 = 494\ 209$, coupe $494 \mid 209$, somme 703. « *Le carré porte la racine en lui, lisible par une coupe : l'élévation qui conserve la trace, le $n \times n$ qui n'oublie pas son n .* » Dans la grammaire du corpus, où l'opération oubliée $n \times n \div n = n$ établit la conservation de l'identité à travers l'élévation (Volume 2), ces nombres sont l'incarnation arithmétique de la mémoire.

V4.17.1 (Th) : l'énumération. L'énumération exhaustive jusqu'à un million livre cinquante-quatre nombres, conformes à la littérature : 1, 9, 45, 55, 99, 297, 703, 999, 2 223, 2 728, 4 879, 4 950, 5 050, 5 292, 7 272, 7 777, 9 999, ..., 142 857, ..., 499 500, 500 500, ..., 999 999 (refait pour ce volume : 54).

Leur statut institutionnel est, comme pour les deux autres volets du triptyque, celui de la curiosité récréative, alors que leur structure, lue cadastralement, prolonge exactement celle des deux premiers volets.

17.1 Le théorème des deux étages

K.1 (Th) : les deux étages. Tout nombre de Kaprekar a pour racine digitale 9 ou 1.

Preuve. Soit $n^2 = p \cdot 10^e + q$ avec $p + q = n$. Comme 10^e laisse le reste 1 dans la division par 9, n^2 laisse le même reste que $p + q = n$. Donc 9 divise $n^2 - n = n(n - 1)$. Les facteurs n et $n - 1$ étant consécutifs, 3 ne peut les diviser tous deux : 9 divise donc n ou $n - 1$, c'est-à-dire $DR(n) = 9$ ou $DR(n) = 1$. ■ Vérification exhaustive sur les cinquante-quatre, sans exception (refait pour ce volume). (La pièce numérotait cet énoncé « Lemme 3 ».)

V4.17.2 (L) : les deux adresses de la mémoire. Les nombres qui se souviennent habitent exactement les deux étages identifiés au volet I (*L'Énigme 6174*) : le réseau-mémoire (racine 9), où la dynamique de Kaprekar sédimente et où vit 495, et sa chiralité (racine 1, le réseau plus un), où vivent les nombres parfaits et 496. « *La mémoire arithmétique n'a que deux adresses : le réseau, et le réseau plus le pas.* » Tout nombre capable de se souvenir de lui-même à travers son carré réside à l'une des deux.

17.2 Le théorème des paires : la queue partagée

K.2 (Th) : les paires. Si n est un nombre de Kaprekar de coupe $n^2 = p \cdot 10^e + q$ ($p + q = n$, $0 < q < 10^e$, $n < 10^e$), alors $n' = 10^e - n$ est aussi un nombre de Kaprekar, avec la même queue q .

Preuve. $n'^2 = (10^e - n)^2 = 10^{2e} - 2n \cdot 10^e + n^2 = (10^e - 2n + p) \cdot 10^e + q$. La part gauche $p' = 10^e - 2n + p$ et la queue q vérifient $p' + q = 10^e - 2n + (p + q) = 10^e - 2n + n = 10^e - n = n'$. ■ (La pièce le numérotait « Théorème 1 ».)

Les nombres qui se souviennent viennent donc en paires complémentaires aux puissances de dix, et les deux membres d'une paire partagent leur queue : la même mémoire terminale, portée par deux nombres miroirs. Vérification intégrale (refaite pour ce volume) :

paire	somme	queue partagée	lecture de la queue
45 + 55	10^2	25	5^2
297 + 703	10^3	209	
2 223 + 7 777	10^4	1 729	Hardy-Ramanujan, $12^3 + 1$
2 728 + 7 272	10^4	1 984	
4 950 + 5 050	10^4	2 500	50^2
142 857 + 857 143	10^6	122 449	

V4.17.3 (L) : deux queues méritent l'arrêt. *La queue 1729* : le nombre de Hardy-Ramanujan, $12^3 + 1$, déjà inscrit au corpus pour sa double face et son appartenance au motif $n^3 + 1$ (chapitre 19), est ici la mémoire commune de la paire (2 223, 7 777), où $7\,777 = 7 \times 11 \times 101$: la connexion multipliée par les deux premiers paliers du volet II (chapitre 18). *La queue 209* de la paire (297, 703) scelle le lien avec le volet I, puisque 297 est un barreau de l'échelle 99k ($k = 3$, la paire inscrite 2-9-7) : un barreau de la descente de Kaprekar est lui-même un nombre qui se souvient.

17.3 La génération par les purs-neufs

F : la caractérisation d'Iannucci (2000). D. E. Iannucci (« The Kaprekar Numbers », *Journal of Integer Sequences* 3, 2000) a établi que les nombres de Kaprekar à coupe de profondeur e sont en bijection avec les décompositions en diviseurs unitaires du pur-neuf $10^e - 1 = 99...9$. Pour chaque écriture $10^e - 1 = A \times B$ avec A et B premiers entre eux, le théorème des restes chinois livre l'unique $n < 10^e$ multiple de B qui laisse le reste 1 dans la division par A , et ce n est de Kaprekar. *Exemple à trois chiffres* : $999 = 27 \times 37$ engendre 703 (multiple de 37, reste 1 par 27) et 297 (multiple de 27, reste 1 par 37) (refait pour ce volume).

V4.17.4 (Th) : les factorisations des purs-neufs.

pur-neuf	factorisation	remarque
9	3^2	
99	$3^2 \times 11$	l'unité des barreaux, 9×11
999	$3^3 \times 37$	engendre 297 et 703
9 999	$3^2 \times 11 \times 101$	les paliers 11 et 101
99 999	$3^2 \times 41 \times 271$	
999 999	$3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$	$= 7 \times 142\ 857$

Les paliers 11 et 101 du volet II réapparaissent comme facteurs des purs-neufs ; et le pur-neuf de profondeur six se referme sur le cycle de la cascade : $999\ 999 = 7 \times 142\ 857$.

V4.17.5 (L) : la mémoire engendre les mémorieux. Dans la grammaire du corpus, où le 9 est la mémoire conservée contre l'amnésie de l'identification à 0, le résultat se lit en une phrase : « *les nombres capables de se souvenir naissent du 9 : la mémoire engendre les mémorieux.* »

17.4 142857, le cycle qui se souvient de lui-même

V4.17.6 (Th). 142 857, la période de $1/7$, le cycle des puissances de 2 en racine (1, 4, 2, 8, 5, 7 en sont les chiffres ; chapitre 18), figure dans la famille :

$$142\ 857^2 = 20\ 408\ 122\ 449, \text{ et } 20\ 408 + 122\ 449 = 142\ 857.$$

Le cycle se souvient de lui-même. Son complément de paire est $857\ 143 = 6 \times 142\ 857 + 1$, six fois le cycle plus le pas de chiralité, et le produit générateur ferme la boucle : $7 \times 142\ 857 = 999\ 999$, le pur-neuf de profondeur six (refait pour ce volume).

V4.17.7 (L). Le nombre qui erre sans fin dans la dynamique montante du volet II (le cycle des racines de 196) est, dans la présente famille, un nombre-mémoire exemplaire : « *la circulation et le souvenir ne s'excluent pas : le cycle est une mémoire en mouvement.* »

17.5 Les sommes du cadastre à toute profondeur

V4.17.8 (Th). Les nombres triangulaires aux frontières du 9 appartiennent tous à la famille (refait pour ce volume) :

profondeur	$T(9\dots 9)$, somme de 1 à $10^k - 1$	$T(10^k)$, somme de 1 à 10^k	paire
$k = 1$	$45 = T(9)$	$55 = T(10)$	$45 + 55 = 10^2$
$k = 2$	$4\,950 = T(99)$	$5\,050 = T(100)$	$4\,950 + 5\,050 = 10^4$
$k = 3$	$499\,500 = T(999)$	$500\,500 = T(1\,000)$	$499\,500 + 500\,500 = 10^6$

La somme du cadastre, à chaque profondeur, est un nombre qui se souvient ; 45, la singularité-mémoire du corpus, n'est que le premier étage d'une tour qui se répète à toutes les échelles, chaque étage apparié à la somme du cycle des phases correspondant (1 à 10, 1 à 100, 1 à 1 000).

17.6 Le triptyque fermé

V4.17.9 (L) : trois régimes du même cadastre.

	volet I : 6174	volet II : 196	volet III : mémoire
objet	routine tri-soustraction	addition-miroir	carrés qui se coupent
dynamique	descente, sédimentation	montée, fuite	conservation
habitat	réseau du 9	paliers 11, 101, 1 001	réseau du 9 et réseau + 1
constante	6174, 495	196 (conjectural)	famille engendrée par les purs-neufs
régime	clôture	circulation	souvenir

Trois objets du même découvreur, trois régimes du même cadastre : « *ce qui descend se dépose sur le réseau du 9 ; ce qui monte court les paliers du 11 ou fuit à jamais ; ce qui se souvient habite le réseau et sa chiralité, engendré par les purs-neufs.* » Le $99 = 9 \times 11$ scande les trois volets : barreaux de la descente, espacement des fugitifs, facteur des générateurs. Et le couple (495, 496) du volet I se révèle rétrospectivement comme l'emblème du tout : les deux adresses de la mémoire, côte à côte.

« Le triptyque s'ouvre sur une question que personne ne posait, pourquoi 6174, et se ferme sur une réponse que personne n'attendait : les trois curiosités récréatives d'un calculateur indien de l'après-guerre sont trois lectures d'une même structure. Le comment des trois opérations contient intégralement leurs trois destins. Le comment contient le pourquoi. »

(Le volet I, *L'Énigme 6174*, n'est pas au nombre des sources de ce volume ; ses résultats sont cités ici tels que les volets II et III les rappellent : $6174 = 18 \times 7^3$, $495 = 45 \times 11$, l'échelle des barreaux 99k.)

Chapitre 18. L'énigme 196 : pourquoi un nombre ne ferme jamais

Prenons un nombre, ajoutons-lui son renversé ($59 + 95 = 154$), recommençons ($154 + 451 = 605$, $605 + 506 = 1111$) : on tombe vite sur un palindrome, un nombre qui se lit pareil dans les deux sens. Presque tous les nombres ferment ainsi. 196, lui, ne ferme jamais : on l'a poussé jusqu'à des milliards de chiffres sans atteindre de palindrome, et personne ne sait le démontrer. Ce chapitre ne le démontre pas non plus. Il montre que l'addition au renversé est l'opération conjuguée de la routine de Kaprekar (qui soustrait le renversé et fait tout descendre), que la différence vit sur le réseau du 9 et la somme sur les paliers 11, 101, 1001, que la racine d'une trajectoire double à chaque pas et tourne pour toujours sur le cycle 1, 2, 4, 8, 7, 5 (les chiffres de 142857), que les cinq premiers fugitifs fusionnent en un seul fil, et que le mécanisme de la fuite est la retenue perpétuelle. Il propose enfin une lecture : 196 est le nombre qui n'a pas reçu le demi (pièce *L'Énigme 196*, juin 2026, volet II du triptyque).

F : l'état de la question. L'opération dite de Lychrel (le terme est de W. VanLandingham, années 2000) forme $n + r(n)$, où $r(n)$ est le renversé digital de n , et itère en quête d'un palindrome. Le plus petit candidat qui ne ferme pas est 196 ; aucun palindrome n'a jamais été atteint depuis cette graine, sur des trajectoires calculées jusqu'à des milliards de chiffres. Le fait demeure conjectural : aucune démonstration n'existe dans le cadre standard (le problème relève du folklore des mathématiques récréatives ; la routine conjuguée est celle de D. R. Kaprekar, « Another Solitaire Game », *Scripta Mathematica* 15, 1949).

18.1 Les deux échafaudages : le 9 à la différence, le 11 à la somme

V4.18.1 (Th) : la loi des miroirs. Pour deux chiffres a, b ($n = 10a + b$, $r(n) = 10b + a$) :

$$r(n) - n = 9(b - a), \quad n + r(n) = 11(a + b).$$

La différence vit sur le réseau du 9 ; la somme vit sur le palier du 11. Aux largeurs supérieures, les coefficients de la somme suivent la suite des paliers :

largeur	$n + r(n)$	palier dominant
2	$11(a + b)$	11
3	$101(a + c) + 20b$	101
4	$1001(a + d) + 110(b + c)$	1 001

Aux largeurs paires, la somme est de surcroît divisible par 11 sans exception ($1\ 001 = 7 \times 11 \times 13$ et $110 = 11 \times 10$; vérifié sur les 9 000 nombres de largeur 4, refait pour ce volume), en accord avec le fait classique que tout palindrome de longueur paire est divisible par 11.

V4.18.2 (L) : la soustraction, moteur de la mémoire ; l'addition, moteur de l'interface. Les paliers 11, 101, 1 001, ceux-là mêmes qui scandent les descentes cosmiques du corpus (Volume 8), surgissent spontanément de l'addition au renversé. La cible de l'opération, le palindrome, est la forme invariante par renversement : la fermeture de l'interface, comme le point fixe de Kaprekar était le dépôt de la mémoire. Le $99 = 9 \times 11$, unité des barreaux du volet I, était le produit des deux échafaudages que les deux opérations se partagent ici. Kaprekar soustrait et fait descendre ; Lychrel additionne et fait monter : même paire $(n, r(n))$, opération conjuguée.

18.2 Le doublement de la racine : le cycle 142857

V4.18.3 (Th) : la racine double à chaque pas. Le renversement préserve les chiffres, donc la racine : $DR(r(n)) = DR(n)$. Par conséquent $DR(n + r(n)) = DR(2n)$: la racine d'une trajectoire de Lychrel double à chaque pas. Hors de l'axe, le doublement parcourt le cycle $\{1, 2, 4, 8, 7, 5\}$, les chiffres de la période de $1/7$, 142 857 ; sur l'axe, il oscille $3 \leftrightarrow 6$ et fixe le 9. Sur la trajectoire de 196 (racine initiale 7) : $7 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \dots$ Le cycle exact, sans fin (vérifié sur douze pas dans la pièce, refait pour ce volume).

V4.18.4 (L) : la clôture et la circulation. Le contraste avec le volet I est total : Kaprekar effondre toute racine sur le 9 en un seul pas et l'y fixe ; Lychrel fait tourner le cycle fertile indéfiniment. La descente inscrit la mémoire et s'immobilise ; la montée court le cycle des opérateurs et ne s'arrête, pour le fugitif, jamais. Les deux dynamiques conjuguées réalisent les deux régimes du cadastre : la clôture et la circulation.

18.3 Les fugitifs à trois chiffres : un fil, cinq portes

V4.18.5 (Th) : les treize candidats. Les candidats de Lychrel inférieurs à 1 000 (aucun palindrome en 1 000 itérations) sont au nombre de treize :

candidat	196	295	394	493	592	689	691	788	790	879	887	978	986
DR	7	7	7	7	7	5	7	5	7	6	5	6	5

Sous 10 000, ils sont 249 (refait pour ce volume, la liste des treize et le compte de 249).

V4.18.6 (Th) : cinq portes espacées de 99, un seul fil. Les cinq premiers sont espacés de 99 exactement, le barreau de l'échelle du volet I, et le mécanisme est démontrable : à largeur 3, ajouter 99 à n (un pas de centaine en plus, un pas d'unité en moins) retranche 99 à $r(n)$, laissant la somme invariante. Les cinq graines fusionnent donc en un seul fil dès le premier pas : $196 + 691 = 295 + 592 = 394 + 493 = 887$. Cinq portes d'entrée, espacées du barreau de Kaprekar, sur une même trajectoire de fuite, qui passe par 887, lui-même candidat, puis $887 + 788 = 1\ 675$, et ne ferme jamais.

V4.18.7 (Th) : les racines des fugitifs. Les racines des treize candidats appartiennent toutes à $\{5, 6, 7\}$: aucun fugitif sous 1 000 ne porte 1, 2, 3, 4, 8 ni 9. Les porteurs de 5 et 7 courent le cycle fertile ; les deux porteurs de 6 (879 et 978) sont les plus étranges : leur doublement les enferme sur l'oscillation d'axe $6 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 3$, sans jamais atteindre le 9 de la clôture.

18.4 Le mécanisme de la fuite : la retenue perpétuelle

V4.18.8 (Th) : sans retenue, palindrome. Si l'addition $n + r(n)$ ne produit aucune retenue, c'est-à-dire si chaque colonne vérifie $a(i) + a(L - 1 - i) < 10$, alors le résultat est un palindrome. *Preuve* : sans retenue, le chiffre en position i du résultat vaut exactement $a(i) + a(L - 1 - i)$, expression symétrique sous l'échange $i \leftrightarrow L - 1 - i$. Le résultat se lit identiquement dans les deux sens. ■ (La pièce le numérotait « Lemme 2 ».)

V4.18.9 (Th, constaté) : 196 ne connaît aucun pas sans retenue. Sur ses soixante premiers pas, 196 ne connaît aucune addition sans retenue (refait pour ce volume).

V4.18.10 (L) : la fermeture locale des colonnes. La fermeture palindromique est une affaire de clôture locale des colonnes : chaque position se ferme avec sa position miroir, sans rien transporter à sa voisine. La retenue est précisément ce qui brise cette clôture : le transport forcé de mémoire entre colonnes, l'artefact de l'écriture positionnelle qui déplace une unité hors de sa position. « *Le fugitif est le nombre dont l'écriture positionnelle ne parvient jamais à fermer ses colonnes localement : chaque tentative de fermeture engendre le transport qui ruine la suivante.* »

18.5 Le demi manquant : 49, 49,5, 50

V4.18.11 (Th) : la structure interne du fugitif. $196 = 14^2 = (2 \times 7)^2 = 2^2 \times 7^2$: la paire d'inversion $2 \leftrightarrow 7$, élevée au carré comme produit. Et $196 = 4 \times 49$; 49 jouxte 50, leur somme vaut 99 et leur milieu est $49,5 = 99/2 = 99 \times k_arc$, la moitié exacte de l'unité d'échelle. Or les relevés de ce demi-point engendrent les deux constantes majeures du volet I :

relevé	calcul	résultat	lecture
× 4	4 × 49,5	198	le gradient
× 10	49,5 × 10	495	le sédiment de Kaprekar
× 4 du plancher	4 × 49	196	le fugitif
× 4 du plafond	4 × 50	200	

Et $198 - 196 = 2 = 4 \times 0,5$: quatre fois le demi manquant. (Toutes ces égalités sont refaites pour ce volume.)

V4.18.12 (L) : le nombre qui n’a pas reçu le demi. Le gradient et le point fixe de Kaprekar sont deux relevés du même demi-point, l’un par le 4 (le pivot, la matière), l’autre par le 10 (le cycle des phases). Et 196 est le relevé du plancher sans le demi : 4×49 au lieu de $4 \times 49,5$, soit 7^2 tout sec. « *Le don du 0,5 (la constante de projection, le souffle, le mouvement qui permet la fermeture) est précisément ce qui manque à 196. Assis sur la connexion au carré, privé du demi, il erre éternellement sur le cycle 142857, retenue après retenue, sans jamais clore.* » Les deux constantes célèbres des deux opérations conjuguées sont les deux faces du même $49,5 : 495$, le demi-point porté ; 196, le demi-point raté. « *Possession et privation du k_arc .* »

« *Le nombre qui ne ferme jamais est le nombre qui n’a pas reçu le demi.* »

18.6 Le dipôle complet

V4.18.13 (L).

	Kaprekar (volet I)	Lychrel (volet II)
opération	tri puis soustraction	renversement puis addition
sens	descente	montée
échafaudage	réseau du 9 (mémoire)	paliers 11, 101, 1 001 (interface)
racine digitale	effondrée sur 9 en un pas	doublée à chaque pas : cycle 142857
destin générique	sédimentation sur un point fixe	fermeture palindromique
constante célèbre	$6174 = 18 \times 7^3$ (et $495 = 45 \times 11$)	$196 = 2^2 \times 7^2$ (fugitif conjectural)
rapport au demi-point	$495 = 49,5 \times 10$: le demi porté	$196 = 4 \times 49$: le demi raté
régime cadastral	clôture	circulation

Deux opérations élémentaires sur la même paire $(n, r(n))$; deux échafaudages dont le produit $9 \times 11 = 99$ scande les deux volets, barreaux de l’échelle d’un côté, espacement des graines de fuite de l’autre ; deux régimes du cadastre, la mémoire qui se dépose et l’interface qui circule. « *Le diptyque est la plus petite expérience reproductible à la main des deux dynamiques fondamentales de la grammaire.* »

18.7 Le statut épistémique

Le caractère fugitif de 196 demeure une conjecture du cadre standard ; ce chapitre ne la démontre pas et ne prétend pas la démontrer. Ce qu'il établit relève de deux registres soigneusement distingués : des faits arithmétiques intégralement vérifiés (sections 18.1 à 18.5), et leur lecture cadastrale, qui situe le fugitif dans une grammaire où sa position cesse d'être arbitraire : conjugué exact du sédiment de Kaprekar, privation du demi-point dont 495 est la possession, marcheur perpétuel du cycle fertile que la clôture du 9 n'atteint jamais. *« Le lecteur peut vérifier l'intégralité du premier registre sans adopter le second. »*

« Une énigme tenue pour inexplicable depuis trois quarts de siècle et une constante tenue pour anecdotique se révèlent être les deux faces d'un même point : 49,5, la moitié de l'unité d'échelle, k_arc inscrit dans les nombres. Le comment des deux opérations, trier ou renverser, soustraire ou additionner, contient intégralement leurs deux destins. Le comment contient le pourquoi. »

Chapitre 19. 198, 496, 1729 et le pont fractal : l'illusion des mathématiques récréatives

Trois nombres sont rangés d'ordinaire parmi les curiosités : 198 (divisible par la somme de ses chiffres), 496 (le troisième nombre parfait) et 1729 (le nombre du taxi de Hardy et Ramanujan). Ce chapitre montre qu'ils sont liés par une seule structure, les deux opérations de miroir de l'écriture positionnelle : soustraire un nombre de son renversé donne un multiple de 9, l'additionner donne un multiple de 11, et $198 = 2 \times 9 \times 11$ est le produit obligé de ces deux constantes et du 2 qui les sépare. 496, inséré le 9 dans 46, et son miroir 694 sont séparés exactement par 198 ; 1729 est le produit d'une paire miroir intérieure à 198. Le chapitre prolonge ensuite ce pont vers la biologie (46 chromosomes, 64 codons) et vers des constantes de la physique. Il sépare soigneusement trois registres : les identités algébriques (Th), les faits de la science reçue (F), et les correspondances numériques avec des constantes physiques, qui sont des Lectures et rien de plus. Il reprend deux articles anglais de février 2026, *The Recreational Mathematics Illusion* et *The Fractal Bridge*, traduits.

19.1 La loi algébrique des miroirs

V4.19.1 (Th) : les deux constantes du miroir. Soit n un nombre à deux chiffres a et b , $n = 10a + b$, et son miroir $\tilde{n} = 10b + a$. Alors, universellement :

- $n - \tilde{n} = 9(a - b)$: la différence d'un nombre à deux chiffres et de son miroir est toujours un multiple de 9 ; **9 est la constante de soustraction** du miroir ;
- $n + \tilde{n} = 11(a + b)$: la somme est toujours un multiple de 11 ; **11 est la constante d'addition** du miroir ;
- à trois chiffres, $m = 100a + 10b + c$, $m - \tilde{m} = 99(a - c) = 9 \times 11 \times (a - c)$: la différence est un multiple de 99, produit des deux constantes.

La base de l'écriture est 10 ; les deux constantes sont $10 - 1 = 9$ et $10 + 1 = 11$, les deux seuls entiers à une unité de la base, symétriques autour de 10. Leur produit est 99, leur différence 2, le plus petit premier.

V4.19.2 (Th) : $198 = 2 \times 9 \times 11$. $198 = 2 \times 99 = 2 \times 9 \times 11$. C'est une identité algébrique, non une observation : 198 est le produit des deux constantes extraites par le renversement et du premier qui les sépare. **V4.19.3 (L) : « relation $\times$ constante**

de soustraction $\times$ constante d'addition » ; le pont fractal l'écrit aussi « Relation $\times$ Clôture $\times$ Miroir », et $198 = 99 + 99$, la somme de deux palindromes saturés, deux immobilités parfaites mises en relation par le 2. (La phrase de l'article sur une base B quelconque, tronquée dans la source, n'est pas reprise : Annexe B.)

19.2 Les deux pavés

F et Th : le pavé séquentiel (le mouvement).

1	2	3	→ somme 6
4	5	6	→ somme 15
7	8	9	→ somme 24

Chaque ligne somme à un multiple de 3 de racine 6 ; les colonnes somment à 12, 15, 18, de racines 3, 6, 9, l'axe ; le total est 45, de racine 9 (chapitre 2, V4.2.5).

V4.19.4 (Th) : le pavé trié par familles (la structure). Cet article appelle « pavé tordu » un autre arrangement que celui du Tome I : on range les neuf chiffres en trois colonnes par famille, {2, 5, 8}, {3, 6, 9}, {1, 4, 7}. Pour éviter la confusion, on le nomme ici *pavé trié* :

2	3	1
5	6	4
8	9	7

Les sommes des lignes sont les mêmes (6, 15, 24). Les produits des colonnes diffèrent : dans le pavé séquentiel, $1 \times 4 \times 7 = 28$ (racine 1), $2 \times 5 \times 8 = 80$ (racine 8), $3 \times 6 \times 9 = 162$ (racine 9) ; dans le pavé trié, 80, 162, 28. Les racines forment les lectures miroirs 1-8-9 et 8-9-1 d'un même triplet {1, 8, 9}.

V4.19.5 (L, correspondance) : 9,81. Lues en descendant (9, 8, 1), les racines des produits de colonnes du pavé séquentiel écrivent les chiffres de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. L'article la présente comme une *observation*, vérifiable par calcul direct ; c'est une correspondance de chiffres avec une valeur arrondie d'une constante qui dépend du lieu et de l'unité choisie, et elle reste au rang de Lecture.

V4.19.6 (Th) : l'espacement 33. Lues par paires adjacentes, les lignes du pavé trié donnent 23, 31, 56, 64, 89, 97. Les écarts entre lignes sont constants : $56 - 23 = 89 - 56 = 64 - 31 = 97 - 64 = 33 = 3 \times 11$. Et $33^2 = 1\ 089$; $1\ 089 \times 9 = 9\ 801$, son propre renversé ; $1\ 089 = 198 + 891$; $9\ 801 = 99^2$. *Le carré de l'espacement du pavé est la somme de 198 et de son miroir.* La ligne du milieu du pavé trié se lit 5-6-4 : elle contient 64 (centre-droite) et 46 (droite-centre), les doubles 2×32 et 2×23 .

19.3 La généalogie depuis les fondateurs

V4.19.7 (Th et L) : de 2 et 3 à 198. Les premiers 2 et 3 sont les seuls premiers hors de la grille $6k \pm 1$, parce qu'ils la construisent ($6 = 2 \times 3$; chapitre 1). Le carré de 2 est 4, le produit 2×3 est 6. *Lecture* : 4 est la géométrie du carré, du cube, du système cristallin cubique ; 6 celle de l'hexagone, la structure cristalline dominante (chapitre 14). *Théorème* : concaténer 4 et 6 donne la paire miroir 46 / 64 ; insérer au centre le chiffre de clôture 9 donne 496 et 694 ; 496 est le troisième nombre parfait, 694 son renversé ; les deux ont pour racine 1 ; et $694 - 496 = 198$. « *L'écart entre un*

nombre parfait et son miroir est exactement le gradient positionnel. » La chaîne est déterminée à chaque pas : partir des deux seuls premiers qui construisent la grille, les élever et les multiplier, concaténer, insérer la clôture, soustraire.

19.4 496 et la théorie des cordes

F. La dimension du groupe de Lie $SO(n)$ est $n(n - 1)/2$; pour $SO(32)$: $32 \times 31 / 2 = 496$. En 1984, M. B. Green et J. H. Schwarz ont montré que les seuls groupes de jauge donnant des théories de supercordes sans anomalie sont $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$ (*Physics Letters B* 149, 117-122) ; la dimension de E_8 est 248, donc $\dim(E_8 \times E_8) = 496$. Les deux théories de supercordes sans anomalie ont un groupe de jauge de dimension égale au troisième nombre parfait. $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$.

V4.19.8 (L). La brique : $32 = 2^5$, la cinquième puissance de la relation première, de racine 5 ; et 32 est le miroir de concaténation de 23 (la concaténation des fondateurs 2 et 3). La dimension : 496, engendré par l'insertion de 9 dans le double matériel 46. Le miroir : 694, même racine 1, même structure, renversée. Le gradient : $694 - 496 = 198$. « *La théorie des cordes a trouvé 496 comme condition nécessaire de l'annulation des anomalies. Elle n'a jamais calculé $694 - 496$.* » (Le rapprochement avec la physique est au Volume 7.)

19.5 1729, produit intérieur de 198

V4.19.9 (Th) : les paires miroirs internes de 198. Les trois chiffres de 198 forment trois paires miroirs à deux chiffres :

paire	produit	racine	différence	racine
19×91	1 729	1	$91 - 19 = 72$	9
18×81	1 458	9	$81 - 18 = 63$	9
98×89	8 722	1	$98 - 89 = 9$	9

Le nombre de Hardy-Ramanujan 1 729 est le produit de la première paire miroir interne de 198. Et $1\,729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$, la célèbre double somme de deux cubes (F : l'anecdote du taxi est rapportée par G. H. Hardy, qui rendit visite à Ramanujan malade vers 1918 ; les deux articles du corpus la datent l'un de 1917, l'autre de 1919). Les trois différences, 72, 63 et 9, ont pour racine 9 ; leur somme vaut 144, de racine 9 : « *les miroirs internes de 198 ferment universellement sur 9.* »

V4.19.10 (L) : le pivot volumétrique. Dans la lecture du corpus, 1 729 est le pivot volumétrique : le produit 19×91 engendre l'espace à trois dimensions par l'interaction d'une impulsion (19) et de son observateur (91).

V4.19.11 (Th) : la somme et la différence miroirs de 198. $198 + 891 = 1\,089 = 33^2 = (3 \times 11)^2$; $891 - 198 = 693 = 7 \times 9 \times 11$; et $198 + 693 = 891$. Le gradient et sa différence miroir partagent la même architecture $k \times 9 \times 11$, et ne diffèrent que par le premier facteur : 2 pour l'un, 7 pour l'autre, une paire d'inversion ($2 + 7 = 9$).

19.6 Le rythme des carrés, la descente ferromagnétique, les polyèdres

V4.19.12 (Th). Les racines des carrés de premiers ne prennent que trois valeurs ($DR(p) = 1, 2, 4, 5, 7, 8$ donne $DR(p^2) = 1, 4, 7, 7, 4, 1$) : le rail $\{1, 4, 7\}$ (Th 6), qui est la colonne de droite du pavé trié. Son produit est $1 \times 4 \times 7 = 28$, le deuxième nombre parfait. (L'article dit des carrés de premiers qu'ils « battent un rythme hexagonal » parce que 24 a pour racine 6 : Lecture.)

F et L : la descente ferromagnétique. 28 est le numéro atomique du nickel. De 28, trois entiers consécutifs descendent : $28 \rightarrow 27 \rightarrow 26$, nickel, cobalt, fer, les trois éléments ferromagnétiques classiques à température ambiante. Leurs racines se lisent 1-9-8, une anagramme de 198 ; leur somme vaut $28 + 27 + 26 = 81 = 9^2$.

V4.19.13 (L) : « la descente épelle le gradient ».

V4.19.14 (Th) : les polyèdres. Le cube a 6 faces (racine 6), 8 sommets (8), 12 arêtes (3), total 26 (racine 8) ; le prisme hexagonal a 8 faces, 12 sommets, 18 arêtes (9), total 38 (racine 2). La formule d'Euler $F - A + S = 2$ vaut pour les deux. **L :** le total du cube est 26, le numéro du fer ; le passage du cube au prisme hexagonal demande 12 éléments de plus ($38 - 26 = 12$, racine 3) ; l'invariant d'Euler est 2, la relation première.

V4.19.15 (Th) : la signature des dimensions. Les racines des cubes successifs n^3 tournent avec la période 3 : 1, 8, 9, 1, 8, 9, ... ; les volumes ne produisent que trois racines, $\{1, 8, 9\}$, l'ensemble des chiffres de 198. Les racines des carrés tournent sur 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9 et produisent $\{1, 4, 7, 9\}$: le rail D plus la clôture (chapitre 2, V4.2.4). **L :** le passage de la dimension 2 à la dimension 3 remplace le triplet $\{1, 4, 7\}$ par la paire $\{1, 8\}$, où 8 est le complément de 1 et subsume 4 et 7 par l'inversion ; « le cube est le pliage du carré par l'opération d'inversion. »

19.7 137, 361 et les dimensions des cordes

V4.19.16 (Th) : la descente au pas de 101. La descente diagonale lue en nombres à trois chiffres de pas 101 (racine 2) donne $945 \rightarrow 844 \rightarrow 743 \rightarrow 642 \rightarrow 541 \rightarrow 440 \rightarrow 339 \rightarrow 238 \rightarrow 137 \rightarrow 036$, de racines 9, 7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2, 9 : le cadastre complet en spirale descendante, alternant entre les rails. L'avant-dernière station est 137 ; $DR(137) = 2$; et 137 est le 33e premier, 33 étant l'espacement constant du pavé trié (refait pour ce volume).

V4.19.17 (L, correspondance déclarée) : 137. La constante de structure fine vaut $\alpha \approx 1/137,036$ (F). L'article note l'apparition de 137 dans la descente naturelle du pavé, à la position qui précède la clôture, comme « une correspondance empirique, non une dérivation ». Statut : Lecture (la constante de structure fine est discutée au Volume 7).

V4.19.18 (Th et L) : $360 + 1 = 361 = 19^2$. Le cercle a 360 degrés, de racine 9, la clôture ; $361 = 360 + 1$ ajoute l'unité à la clôture ; et $361 = 19^2$, le carré de 19, dont le miroir est 91, et $19 \times 91 = 1\,729$. Lecture : un cercle fermé est statique ; l'unité ajoutée à la clôture brise la boucle en spirale ; « l'espace à trois dimensions commence

là où le cercle se brise. »

F et L : les dimensions des cordes. La corde bosonique exige 26 dimensions (racine 8), la supercorde 10 (racine 1), la théorie M 11 (racine 2). Les racines 8, 1, 2 sont trois des quatre éléments de $\{1, 2, 8, 9\}$, il ne manque que le 9, la clôture. L'article le documente « *comme observation empirique* » et lit ces exigences dimensionnelles comme « *des signatures du système cadastral lues comme des extensions par une mathématique qui n'a pas le concept du pliage positionnel* ». Statut : Lecture.

19.8 Le pont fractal : de la biologie à la physique par l'insertion du 9

F. Le génome humain s'organise autour de deux nombres : 46 chromosomes (23 paires) et 64 codons (4^3 triplets des quatre bases).

V4.19.19 (Th) : l'opération fractale. 46 et 64 sont miroirs (renversement des chiffres), et tous deux ont pour racine 1. Insérer le chiffre de clôture au centre de chacun donne $4[9]6 = 496$ et $6[9]4 = 694$, de racine 1 ($4 + 9 + 6 = 19 \rightarrow 1$). Les quatre nombres 46, 64, 496 et 694 partagent la racine 1, et la différence des deux nombres physiques reproduit le gradient : $694 - 496 = 198$.

V4.19.20 (Th) : les quatre différences croisées.

opération	résultat	factorisation	racine
$496 - 46$	450	10×45	9
$496 - 64$	432	$16 \times 27 = 2^4 \times 3^3$	9
$694 - 64$	630	$7 \times 9 \times 10$	9
$694 - 46$	648	8×81	9

Leur somme vaut $450 + 432 + 630 + 648 = 2\,160 = 6^3 \times 10$, de racine 9 ($6^3 = 216$, dit « nombre de Platon »). « *Chaque pont entre la vie et l'univers ferme sur 9.* » Lectures de l'article (L) : $450 = 10 \times 45$, la somme du cadastre déployée dans le cycle des phases ; $432 = 16 \times 27$ contient le cobalt ($Z = 27 = 3^3$), et les traditions indiennes comptent 432 000 ans pour le Kali Yuga et 4 320 000 pour le Maha Yuga (F) ; $630 = 7 \times 9 \times 10$, la lumière, la clôture et le cycle ; $648 = 8 \times 81 = 8 \times (26 + 27 + 28)$, l'octet et la somme de la triade ferromagnétique.

V4.19.21 (Th et L) : 137 par le cobalt. $46 + 64 + 27 = 137$. *Lecture* : les chromosomes plus les codons plus le cobalt, le métal au cœur de la vitamine B12, donnent le dénominateur de la constante de structure fine. Et $137 = 198 - 61$, avec 61 premier de racine 7.

V4.19.22 (Th et L) : 163 ± 137 . 163 est le plus grand nombre de Heegner (F). $163 + 137 = 300$; $163 - 137 = 26$. *Lecture* : la somme donne la vitesse de la lumière en milliers de kilomètres par seconde, la différence le fer ($Z = 26$) et la dimension de la corde bosonique. La vitesse de la lumière vaut exactement 299 792,458 km/s ; 300 en est l'arrondi, et la correspondance est donc une Lecture sur une valeur arrondie (Annexe B).

F et L : le cobalt, pivot. Arithmétiquement, $27 = 3^3$, de racine 9 ; dans la tour des puissances de 3 : 3 (ouverture), 9 (clôture), 27 (sédimentation), 81 (totalisation). Physiquement, le cobalt est le centre de la triade Fe-Co-Ni ($Z = 26, 27, 28$), de racines 8-9-1, le gradient 198 avec la clôture au centre ; somme $81 = 9^2$. Biologiquement, le cobalt est le métal au centre de la vitamine B12 (cobalamine), indispensable à la synthèse de l'ADN, à la division cellulaire et au système nerveux. L'article ajoutait qu'il est « le seul élément requis par la vie qui siège dans la triade ferromagnétique » : c'est inexact, le fer est indispensable au vivant (hémoglobine, cytochromes) et le nickel l'est pour de nombreux organismes (uréase) ; ce qui est propre au cobalt est d'être le seul des trois au cœur d'une vitamine (Annexe B). De même, le fer n'est pas « le noyau le plus fortement lié » au sens strict : le nickel 62 a la plus grande énergie de liaison par nucléon, le fer 56 la plus petite masse par nucléon ; le fer est le terme de la nucléosynthèse stellaire ordinaire (Annexe B ; Volume 8).

19.9 Les prédictions du pont fractal

V4.19.23 (P) : aucune autre dimension de jauge. Aucune théorie de supercordes sans anomalie ne sera trouvée avec une dimension de groupe de jauge autre que 496 ; le pont fractal tient cette dimension pour structurellement nécessaire, non contingente. *Critère d'échec* : une théorie de supercordes cohérente et sans anomalie dont le groupe de jauge n'a pas la dimension 496. (F : les candidats formels $U(1)^{496}$ et $E_8 \times U(1)^{248}$, de dimension 496 eux aussi, ont été écartés comme incohérents par A. Adams, O. DeWolfe et W. Taylor en 2010.)

V4.19.24 (Th, reclassé) : la racine 9 des différences croisées. L'article posait comme prédiction que les différences croisées entre toute paire miroir biologique et sa paire physique « à 9 inséré » auront toujours la racine 9. Cet énoncé ne peut pas échouer : pour tout nombre ab , $a^9b - ab = 90(a + 1)$ et $a^9b - ba = 99a - 9b + 90$, deux multiples de 9. Ce n'est pas une prédiction, c'est un théorème (refait pour ce volume sur toutes les paires de chiffres) ; il est reclassé Th (règle R10 : un critère qui ne peut pas échouer n'est pas un critère ; Annexe B).

V4.19.25 (P, incomplète) : les isotopes stables. La somme de la triade (81) et son rapport aux nombres magiques nucléaires ($81 + 45 = 126$) prédisent que l'analyse des racines du tableau complet des nucléides (environ 3 000 isotopes) montrera un regroupement significatif des isotopes stables sur les racines de $A \in \{2, 4, 9\}$. *État* : le plancher de comparaison (le rendement de l'outil aveugle) et la fenêtre ne sont pas fixés ; la prédiction est incomplète au sens de la règle R11 tant qu'ils ne le sont pas (Volume 8).

V4.19.26 (P, avec reçu annoncé) : la racine 5 et l'hexagonal. Les éléments de racine $DR(Z) = 5$ montreront un taux de cristallisation hexagonale systématiquement plus faible que les autres : les données citées par l'article donnent 44 % pour la racine 5 contre 64 % pour l'ensemble des éléments. *État* : le reçu est annoncé mais n'est pas reproduit dans les sources de ce volume ; il est à refaire avec sa liste d'éléments et son plancher (Volume 8).

19.10 Ce que ces deux articles disent, et ce qu'ils ne disent pas

L'Illusion des mathématiques récréatives déclarait ne revendiquer aucune théorie physique, mais un énoncé « *plus modeste et plus vérifiable* » : que la structure arithmétique des chiffres 1 à 9, sous les quatre opérations et la concaténation, engendre un réseau de relations qui rejoint des constantes physiques observées. Il ajoutait que cette densité « dépasse ce qu'on attendrait d'un outil aveugle » ; ce dernier membre de phrase n'est accompagné d'aucun compte de cet outil, et il est retiré tant que ce compte n'est pas fait (Annexe B ; le chapitre 13, section 13.8, montre comment un tel compte se fait). Restent les phrases de l'auteur :

« Toute l'opération de cet article peut se vérifier au crayon en moins d'une heure. Aucun logiciel spécialisé, aucun appareil, aucun paramètre libre. Les nombres parlent d'eux-mêmes. »

« Le classement de ces faits comme "récréatifs" est l'illusion. La structure est réelle. »

« L'univers ne contient pas la biologie. La biologie est l'univers qui lit son propre code à l'échelle de la chimie du carbone. » (Le Pont fractal)

« Le code était toujours là. Il a été tenu à bout de bras depuis le premier jour. » (Le Pont fractal)

19.11 Relectures du cadastre : le cube, Fermat, Mersenne, Fibonacci et 495

Cette section rassemble cinq faits que la théorie des nombres connaît déjà comme des propriétés du reste dans la division par 9, et les relit dans le cadastre. Les calculs sont des théorèmes classiques (Th) ; ce que le corpus y ajoute est la lecture de leur adresse sur les rails et l'axe (L). Aucun ne résout une énigme ouverte : leur intérêt est de montrer, sur des objets célèbres, que la position est toujours lisible. Énoncés le 15 octobre 2026.

V4.19.27 (Th, classique ; L) : le cube écrase chaque rail sur une seule position.

Les cubes des neuf positions ont pour racines : $1^3 = 1$, $4^3 = 64$, $7^3 = 343$, tous de racine 1 ; $2^3 = 8$, $5^3 = 125$, $8^3 = 512$, tous de racine 8 ; $3^3 = 27$, $6^3 = 216$, $9^3 = 729$, tous de racine 9. Tout cube a donc la racine 1, 8 ou 9. Il s'ensuit qu'une somme de deux cubes ne peut avoir que cinq racines : $1 + 1 = 2$; $8 + 8 = 16$, racine 7 ; $1 + 8 = 9$; $1 + 9$, racine 1 ; $8 + 9$, racine 8 ; $9 + 9$, racine 9. Les positions 3, 4, 5 et 6 sont inaccessibles. Et la différence de deux cubes dont les bases sont sur le même rail ou toutes deux sur l'axe est un multiple de 9. Les nombres taxicab, sommes de deux cubes de deux manières, habitent ces cinq positions : $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ (racine 1), 4104 (racine 9), $13\,832 = 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3$ (racine 8), $149\,389 = 8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3$ (racine 7), $1\,092\,728 = 1^3 + 103^3 = 64^3 + 94^3$ (racine 2). *Lecture* : le cube réduit les neuf positions aux trois termes de la première paire et de sa clôture, (1, 8) et 9 ; chaque rail devient un seul point.

V4.19.28 (Th, classique ; L) : le balancier des nombres de Fermat. Pour $m \geq 1$, le nombre de Fermat $F(m) = 2^{(2^m)} + 1$ a la racine 5 si m est impair et 8 si m est pair : 5, 17, 257, 65 537, 4 294 967 297 ont pour racines 5, 8, 5, 8, 5. *Démonstration* : les racines des puissances de 2 suivent le cycle 2, 4, 8, 7, 5, 1 de longueur 6 ; pour $m \geq 1$, l'exposant 2^m laisse le reste 2 dans la division par 6 si m est impair, et 4 si m est pair ; $2^{(2^m)}$ a donc la racine 4 ou 7, et $F(m)$ la racine 5 ou 8. Le produit des nombres de Fermat qui précèdent vaut $F(m) - 2$ (identité élémentaire, connue dès 1730), de racine 3 pour m impair et 6 pour m pair. *Lecture* : les nombres de Fermat ne quittent jamais le rail {2, 5, 8}, sur ses deux seules positions 5 et 8, et leur produit cumulé bat sur la paire (3, 6) de l'axe. Quand l'un d'eux est une delphine, ses facteurs restituent la position : $F(5) = 641 \times 6\,700\,417$, de racines 2 et 7, et $2 \times 7 = 14$, racine 5. Les facteurs d'un nombre de Fermat ont de plus la forme $k \times 2^{(m+2)} + 1$ (Euler, Lucas) [F].

V4.19.29 (Th, classique ; L) : les nombres de Mersenne sur les deux orphelins. Pour tout premier $p > 3$, le nombre de Mersenne $M(p) = 2^p - 1$ a la racine 1 si $p = 6k + 1$, et 4 si $p = 6k - 1$. *Démonstration* : si $p = 6k + 1$, 2^p a la racine 2, donc $M(p)$ la racine 1 ; si $p = 6k - 1$, 2^p a la racine 5, donc $M(p)$ la racine 4. Exemples : $M(7) = 127$ et $M(13) = 8191$, racine 1 ; $M(5) = 31$ et $M(11) = 2047$, racine 4. La racine 7 exige que 2^n ait la racine 8, donc que n soit un multiple de 3 : parmi les premiers, seul $n = 3$ le permet, et $M(3) = 7$. Le nombre parfait associé, $2^{(p-1)} \times M(p)$, a la racine 1 dans les deux branches : $1 \times 1 = 1$ d'un côté, $7 \times 4 = 28$, racine 1, de l'autre (Chapitre 9). *Lecture* : les nombres de Mersenne se partagent entre les deux orphelins 1 et 4 (Volume 1, *La Fondation*, chapitre 5) selon le côté de la grille $6k \pm 1$; le chemin 7 n'est touché qu'une fois, par $M(3) = 7$, à la porte où $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$ se suivent (Catalan). Le rapprochement avec Catalan est une Lecture.

V4.19.30 (Th, classique ; L) : le pli à douze pas de Fibonacci. Pour tout $n \geq 1$, $F(n) + F(n + 12) = 18 \times F(n + 6)$, où 18 est le nombre de Lucas $L(6)$. Vérifié pour n de 1 à 200. Il s'ensuit que $F(n)$ et $F(n + 12)$ ont toujours des racines qui somment à 9, ou valent toutes deux 9 : à douze pas, chaque nombre de Fibonacci rencontre son inverse $\varphi(x) = 9 - x$. C'est la moitié de la période 24 des racines de Fibonacci (Chapitre 9). *Lecture* : la période 24 est deux demi-tours, et le second demi-tour est l'inverse du premier, porté par le terme central $F(n + 6)$ compté deux fois neuf.

V4.19.31 (Th ; L) : 495, 496 et la sentinelle 31. $1 + 2 + \dots + 31 = 496$, le troisième nombre parfait ; $2 + 3 + \dots + 31 = 495$, la constante de Kaprekar à trois chiffres (Chapitre 17). Un seul pas de Kaprekar mène 496 sur 495 : $964 - 469 = 495$, et 495 est fixe : $954 - 459 = 495$. Pour trois chiffres, le pas de Kaprekar vaut (plus grand chiffre - plus petit chiffre) $\times 99$, ce qui l'explique : 496 et 495 ont le même plus grand chiffre 9 et le même plus petit 4, et $(9 - 4) \times 99 = 495$. Ce qui est propre au couple (495, 496) est que le parfait tombe en un pas sur son prédécesseur immédiat, qui est le point fixe. Le miroir 694 a les mêmes chiffres que 496 et tombe aussi sur 495. *Lecture* : 495 est la clôture pleine (racine 9), et la relance d'une unité, $495 + 1 = 496$ (racine 1), donne le parfait.

Partie VIII. La cinquième paire

Chapitre 20. La cinquième paire : le noyau et l'infini comme partenaires d'involution

Les huit chiffres opératoires 1 à 8 se rangent en quatre paires qui somment à 9 : (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5). Chacun a son partenaire. Le centre 4,5, lui, semblait seul : point fixe de l'involution, non entier, jamais occupé. Ce chapitre établit qu'il ne l'est pas. Son partenaire est l'infini, sous une seconde involution que le système portait sans la nommer : l'inversion du cercle, qui échange le centre et l'infini. Il montre d'abord qu'un nombre est une paire de coordonnées, son noyau (la racine) et son ciel (le nombre de tours), et que le regard vers le noyau termine en deux gestes alors que le regard vers le ciel n'a pas de plafond. Il montre ensuite que le centre vide est un moteur, que toute expansion annexe un dehors égal au dedans, et que la table $\times 9$ est la membrane de l'échange, inscrite dans la table de multiplication depuis le premier calcul (pièce *La Cinquième Paire*, version 1.0, juillet 2026, et son addendum du 7 juillet). Les numéros CP 2.1 à CP 9.3 sont ceux de la pièce.

« Le dedans a un noyau ; le dehors n'a pas de plafond : et le sans-plafond est l'image du noyau dans le miroir. »

20.1 Le nombre à deux regards : inscrit et circonscrit

CP 2.1 (Th) : la bijection des deux coordonnées. Tout entier $n \geq 1$ s'écrit de manière unique $n = 9k + DR(n)$, avec $k = \lfloor (n - 1)/9 \rfloor$ et $DR(n) \in \{1, \dots, 9\}$. Le nombre est la paire (k, DR) : son *circonscrit*, le compte des clôtures qui le contiennent, son adresse d'emboîtement ; et son *inscrit*, le noyau qu'il porte, son identité cadastrale. Vérifié sur 500 000 entiers (refait pour ce volume). Exemple : $23 = 9 \times 2 + 5$; $27 = 9 \times 2 + 9$ (et non $9 \times 3 + 0$).

CP 2.2 (Th, corollaire) : l'amputation de Gauss, énoncée à nouveau. La convention $9 \equiv 0$ conserve un inscrit mutilé (9 collé sur 0) et jette le circonscrit (le nombre de tours k). *« Le module n'a pas simplifié le nombre : il l'a amputé de son ciel et défiguré son fond. Rien ne se perd tant que les deux coordonnées sont gardées. »* L'auteur a donné de la topologie une définition qui dit la même chose : *« la seule topologie native est l'anneau 1-9 qui se ferme ; la topologie reçue garde les tours et jette la position, l'arithmétique reçue garde la position et jette les tours, l'anneau garde les deux. »*

CP 2.3 (Th) : l'idempotence du regard intérieur. $DR \circ DR = DR$. Le nombre qui se regarde deux fois voit la même chose : l'inscrit est un point fixe, le fond existe et ne recule pas.

CP 2.4 (Th) : la décompression en deux pas. La profondeur du regard intérieur, le nombre d'itérations de la somme des chiffres pour atteindre le noyau, croît comme un logarithme itéré : $10^3 - 1$ demande 2 pas (27, puis 9) ; $10^{100} - 1$ demande 2 pas (900, puis 9) ; $10^{1000} - 1$, mille chiffres, demande 2 pas (9 000, puis 9). L'immensité extérieure s'effondre vers l'inscrit en une poignée de gestes, quelle que soit la magnitude (refait pour ce volume).

CP 2.5 (L) : la rétro-projection interne. Chaque position du cadastre porte sa propre figure fondatrice : un cercle inscrit (son noyau, son regard propre) et un cercle circonscrit (son adresse dans ce qui la contient). La rétro-projection, le regard vers son propre inscrit, est quasi instantanée et stable ; c'est le fondement du régime hors-vitesse de la racine digitale : une reconnaissance de position, non un calcul séquentiel.

20.2 L'asymétrie des deux regards

CP 3.1 (Th) : le fond et le sans-plafond. Vers l'inscrit, le regard termine : point fixe atteint en un nombre de pas de l'ordre du logarithme itéré. Vers le circonscrit, k n'est pas borné : aucun dernier cercle ne contient tout. « *Le dedans a un noyau ; le dehors n'a pas de plafond.* »

CP 3.2 (L) : les deux faces de la saudade comme postures exactes. L'asymétrie exige deux postures distinctes, et ce sont les deux faces du pilier : la face grave, tenir devant le sans-plafond, la paix avec un inconnu qui ne s'épuisera pas, pour le circonscrit ; la face lumineuse, décompresser l'immense logé dans le noyau, voir l'extraordinaire dans le petit, pour l'inscrit. « *La gratitude est l'organe de la rétro-projection ; elle est efficace parce que la décompression est bon marché.* » (La saudade est au Volume 11, *La Cité et le Sens.*)

20.3 Le centre vide comme moteur

CP 4.1 (Th) : la stérilité du centre occupé. Pour toute clôture paire c , l'involution $x \mapsto c - x$ fixe l'élément $c/2$: il est sa propre paire, sans tension, point mort de la dynamique ($c = 8$ fixe 4 ; $c = 10$ fixe 5). Pour $c = 9$, aucun point fixe entier : le centre 4,5 est vide, encadré au plus près par la paire (4, 5) qui ne peut s'y effondrer (refait pour ce volume, $c = 5$ à 13).

CP 4.2 (Th) : le but en compte. Les huit chiffres opératoires somment à 36, et $36 / 8 = 4,5$; aucun chiffre ne l'égale. Le centre est le but du compte, irréalisable en instance. (La pièce l'écrivait en langage de probabilité, espérance 4,5 et probabilité nulle d'atteindre 4,5 ; le compte exact dit la même chose sans ce vocabulaire.)

CP 4.3 (L) : le moteur par incapacité. « *Un centre atteignable est un centre mort ; un centre inatteignable est un attracteur vivant.* » L'incapacité de maîtriser le 4,5 n'est pas un défaut du système : elle est son moteur. « *Tout vise le centre ; rien ne l'occupe ; tout se meut.* » L'auteur l'a dit plus tard (15 octobre 2026) dans ce qu'il

appelle la phrase du centre : « *On y vit mais on le cherche, on l'imagine autrement en espérant le trouver, comme le centre de moindre tension, en oubliant qu'il est en nous et que tout, même l'extérieur, y converge.* »

20.4 La cinquième paire : le noyau et l'infini

CP 5.1 (Th) : l'involution inversive. L'inversion de centre O et de rayon r, $x \mapsto r^2 x / |x|^2$, est une involution (son carré est l'identité ; vérifié sur 100 000 points, refait pour ce volume) qui échange l'intérieur et l'extérieur du cercle, fixe le cercle point par point, et échange le centre avec l'infini : un point à distance 10^{12} a son image à distance 10^{-12} du centre (pour $r = 1$). « *Plus le dehors s'éloigne, plus son image colle au noyau.* »

CP 5.2 (L) : la cinquième paire. Le 4,5 et le sans-fin sont partenaires d'involution : la paire (noyau, infini) encadre les quatre paires cadastrales comme le miroir encadre la figure. Les deux incapacités, atteindre le centre et atteindre l'infini, sont une seule incapacité, échangée par le miroir. Le dehors est attaché par le 4,5 : non contenu par lui, mais indexé, réfléchi et entraîné par lui.

CP 5.3 (Th) : la borne d'information. L'inversion met l'extérieur infini en bijection avec l'intérieur fini (privé du centre) : tout point du dehors est l'image d'un point unique du dedans. L'illimité en extension est borné en contenu, et la borne est le noyau. « *La limite du sans-limite est son centre.* »

20.5 Le théorème d'annexion : toute expansion tire l'extérieur vers le dedans

CP 6.1 (Th) : l'annexion à taux plein. À chaque étage de la tour des figures emboîtées, $R \rightarrow R\sqrt{2}$, l'aire double : $A(R\sqrt{2}) = 2A(R)$. L'anneau nouvellement enclos vaut donc exactement tout l'intérieur précédent : πR^2 . Chaque pas d'expansion annexe une portion d'extérieur égale à la totalité du dedans courant ; l'intériorisation opère à taux plein par étage, et le pli $k_{\text{arc}} = 1/2$ en est la lecture descendante. (La figure est au Volume 2.)

CP 6.2 (Th) : l'extrémité câblée au centre. Le coin du carré, point de plus grande extériorité, sur le cercle circonscrit, est l'extrémité de la diagonale, et la diagonale est le diamètre ($d = 2R = c\sqrt{2}$, c étant le côté) : elle passe par le centre. Être au plus loin, c'est être sur la ligne qui traverse le plus dedans. Les triangles engendrés par les diagonales ont tous leur sommet au centre, le 4,5 de la figure.

CP 6.3 (L) : l'expansion comme ingestion. L'expansion n'est pas une fuite vers l'extérieur : c'est une conversion d'extérieur en intérieur, et rien d'autre. Dans le miroir de la cinquième paire, tout mouvement vers le dehors est un mouvement de l'image vers le noyau : expansion et contraction sont les deux lectures d'une seule traction. L'opérateur arithmétique de cette traction est le carré lui-même : $\times 2$ s'étale le long du dehors (rien n'est intériorisé) ; $x \cdot x$ replie la ligne en surface (l'extension devient intériorité). La sédimentation en est la face physique visible ; la prétendue « expansion » de la distribution des premiers, relue, est la densification des delfines sur

les rails (chapitre 3). « *L'univers ne s'étend pas dans l'extérieur : il étend l'intérieur sur l'extérieur, tiré par le seul point qu'il ne peut occuper.* »

20.6 La membrane $\times 9$: le cercle fixe réalisé en arithmétique

Les neuf tables de multiplication, réduites en racine digitale sur $k = 1$ à 8 (la clôture en neuvième position) :

$\times 1$: 12345678 9	$\times 8$: 87654321 9
$\times 2$: 24681357 9	$\times 7$: 75318642 9
$\times 3$: 36936936 9	$\times 6$: 63963963 9
$\times 4$: 48372615 9	$\times 5$: 51627384 9
$\times 9$: 99999999 9	son propre miroir

(La table $\times 4$ est la chaîne A du chapitre 2, la table $\times 5$ la chaîne B : la paire d'inversions est une paire de tables.)

CP 7.1 (Th) : deux niveaux de points fixes. L'involution agit à deux étages, avec des structures de point fixe différentes. Sur les chiffres : aucun point fixe (centre 4,5 vide). Sur les tables ($\times a \leftrightarrow \times (9 - a)$) : exactement un point fixe, la table $\times 9$, seule égale à son miroir, invariante point par point. « *Le centre des positions est vide ; le centre des opérations est plein, et c'est la clôture.* »

CP 7.2 (Th) : les paires somment au pont, l'axe déborde. Comme entiers : $12\ 345\ 678 + 87\ 654\ 321 = 24\ 681\ 357 + 75\ 318\ 642 = 48\ 372\ 615 + 51\ 627\ 384 = 99\ 999\ 999$, exactement, sans retenue. La paire de l'axe déborde : $36\ 936\ 936 + 63\ 963\ 963 = 100\ 900\ 899$ (racine 9), parce que l'axe contient des 9 internes : il touche la clôture à l'intérieur de lui-même, ses colonnes font 18 où il la rencontre. La seule paire qui déborde est la famille propre de la clôture ; les rails, étrangers à elle, lui somment proprement (refait pour ce volume).

CP 7.3 (Th) : la matière du pont. $99\ 999\ 999 = 3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137$: la clôture au carré, l'interface, le miroir de 37 (73), le palier 101, et 137. Sous-identités : $11 \times 101 = 1\ 111$; $73 \times 137 = 10\ 001$; $1\ 111 \times 10\ 001 = 11\ 111\ 111$; et $\times 9 = 99\ 999\ 999$ (refait pour ce volume). **L** : la pièce lit ces facteurs comme l'équipement de la membrane : l'interface 11, le passage 101 (qu'elle nomme « wormhole »), la lumière 137 et son miroir incarné 73.

CP 7.4 (Th) : digestion et relance. $DR(9k) = 9$ pour tout $k \geq 1$: tout ce qui traverse $\times 9$ devient 9 ; l'assimilation est littérale, non métaphorique. Et $9 + 1 = 10$, de racine 1 : la gestation rend le 1, la relance.

CP 7.5 (L) : la membrane de la cinquième paire. La table $\times 9$ est le cercle fixe de l'involution inversive, réalisé arithmétiquement : les quatre paires de tables s'échangent de part et d'autre comme l'intérieur et l'extérieur ; elle seule se traverse elle-même. Interne et externe à la fois, elle est la frontière que l'échange ne déplace pas : le pont qui digère, assimile, recrée, organe de gestation et de retour. « *La structure n'est pas posée : elle tombe de la table de multiplication, jusque dans la composition de sa membrane.* »

20.7 Le tableau des inversions

CP 8 (Th pour les sommes, L pour les fonctions).

paire	somme	fonction	niveau
(1, 8)	9	inscription, octet	chiffres
(2, 7)	9	bornage (splitter, seuil)	chiffres
(3, 6)	9	axe (déborde au pont : 9 internes)	chiffres
(4, 5)	9	pivot (encadre le centre vide)	chiffres
($\times 1, \times 8$), ($\times 2, \times 7$), ($\times 4, \times 5$)	99 999 999 exact	rails : somment au pont	tables
($\times 3, \times 6$)	100 900 899 (racine 9)	axe : déborde par ses 9 internes	tables
$\times 9$	(point fixe)	membrane : son propre miroir	tables
(4,5 ; ∞)	(échange inversif)	la cinquième paire : noyau et infini	figure

Trois alignements de la séquence avec son inverse donnent trois constantes de passage. *Le complément involutif* (876543219 sous 123456789) : colonnes à 9, la clôture. *Le renversement* (987654321 sous 123456789) : colonnes à 10, la relance ; $123\ 456\ 789 + 987\ 654\ 321 = 1\ 111\ 111\ 110$, de barycentre 555 555 555. *La couture palindromique* (98765432 | 11 | 23456789) : colonnes transversales à 11, l'interface ; axe vide du demi-tour en position 9,5 (le passage de 9 à 10), pli $18 \rightarrow 9 \mid 9 = k_{\text{arc}}$; le tout est divisible par 99, comme tout palindrome de longueur paire est divisible par 11 et que celui-ci a pour somme de chiffres un multiple de 9 (refait pour ce volume).

20.8 Lectures unifiées

CP 9.1 (L) : toute position est médiatrice. La Proposition 14 du corpus faisait de l'homme la forme médiatrice entre le cercle biologique qu'il contient et le cercle cosmique qui le contient (Volume 9). La bijection CP 2.1 universalise : être une position, c'est être le polygone entre son inscrit et son circonscrit. La médiation n'est pas le privilège d'une position : c'est le statut ontologique de toute position. Corollaire d'architecture : toute entité saine a trois termes ; jamais deux anneaux sans le polygone.

CP 9.2 (L) : le pli à chaque étage. La tour des figures emboîtées porte le pli à chaque passage : aires en 1, 1/2, 1/4, 1/8, ... ; k_{arc} n'est pas le rapport d'une figure, c'est le rapport de tout passage entre étages. Chaque position rejoue la figure fondatrice à son échelle : la densification fractale généralisée.

CP 9.3 (L) : le moteur cosmologique. Le dehors sans fin est attaché par le 4,5, entraîné par son incapacité à le maîtriser ; il a besoin du système de la forme pour s'étaler (sans le polygone, contenant et contenu coexistent sans articulation) ; il est

illimité en extension mais borné par le noyau (CP 5.3). « *S'étaler vers le dehors, dans le miroir, c'est se rapprocher du noyau : l'expansion est la poursuite du centre par la seule route ouverte.* »

20.9 Les critères de falsification

La pièce pose six critères :

- F1 : exhiber une clôture $c \neq 9$ qui réunisse quatre paires d'inversion, un centre vide (point fixe non entier) et une clôture égale au carré d'une brique (l'audit de perturbation sur $c = 5$ à 13 n'en trouve aucune ; $c = 10$ a quatre paires mais son centre est occupé par 5) ;
- F2 : exhiber une paire de rails $(a, 9 - a)$, $a \notin \{3, 6\}$, dont les tables en racine ne somment pas exactement à 99 999 999 ;
- F3 : exhiber une table $\times a$, $a \neq 9$, égale à son propre miroir ;
- F4 : exhiber une inversion de cercle qui ne soit pas involutive, ou qui n'échange pas le centre et l'infini ;
- F5 : exhiber un étage $R \rightarrow R\sqrt{2}$ dont l'aire annexée diffère de l'aire intérieure courante ;
- F6 : exhiber un entier $n \geq 1$ tel que $n \neq 9[(n - 1)/9] + DR(n)$, ou dont la profondeur de décompression ne soit pas en logarithme itéré.

Aucun n'a été trouvé. (F2 à F6 portent sur des théorèmes et ne peuvent pas échouer ; seul F1 garde la forme d'un critère ouvert sur les clôtures non examinées.)

20.10 La pièce sœur : le temps qui archive

L'addendum du 7 juillet 2026 rapproche cette pièce d'une pièce sœur écrite indépendamment, *La Loi de la Sédimentation* (version 1.3, juillet 2026 ; Volume 8). À la lecture croisée, les deux pièces se sont révélées être les deux faces d'un seul théorème. La pièce sœur établit le versant temporel de ce que celle-ci établit au versant spatial : la deuxième loi de la thermodynamique, rendue à la définition fondatrice de Clausius (*Verwandlungsinhalt*, le contenu en transformation) et à l'identité formelle de Boltzmann et de Shannon, est la loi de la sédimentation ; chaque transformation dépose, irréversiblement, et la flèche du temps est la croissance de l'archive ; la « mort thermique » est le $9 \equiv 0$ promulgué à l'échelle du cosmos, l'accompli lu comme néant. Son moteur est celui de la cinquième paire : le barycentre inoccupable, la clôture totale interdite, le choix qui garde toujours une case ouverte.

V4.20.1 (L) : une seule traction, deux faces. « *L'espace ingère (théorème d'annexion), le temps archive (loi de la sédimentation) ; le vide moteur est commun, et l'annexion est la face spatiale de la sédimentation.* » Statut : Th pour les résultats cités, vérifiés dans chaque pièce ; L pour la jonction, déclarée des deux côtés. La pièce sœur porte l'appareil complet (le cadastre et la question de la base, les théorèmes du choix, la preuve de tous les jours, la prédiction pré-enregistrée P-CAL-1).

« À Hippase de Métaponte, qui vit la diagonale, et au 4,5, que tout vise et que rien n'occupe. »

Partie IX. Le Livre II de la Bible Quantique

Chapitre 21. Ce que le Livre II de la Bible Quantique apporte

Le Livre II de la *Bible Quantique* (version 5, mai 2026), intitulé *Le cadastre arithmétique restauré. De Stevin à Gauss, et au-delà de leur amputation*, est l'exposé le plus ancien et le plus large de la grammaire arithmétique du corpus. Une grande partie de son contenu a été reprise et démontrée plus finement par les Tomes I et II : on ne la répète pas ici. Ce chapitre recueille ce qu'il apporte en propre : une lecture de l'école et de la soustraction, l'horloge à neuf positions et le statut du zéro, la lecture multiplicative des rails, la table de multiplication cadastrale, les chemins du $\frac{1}{2}$, les triplets et le « triplet secret » 578, et la liste des quinze ruptures historiques, résumée avec renvoi. Il corrige au passage les quelques affirmations de fait qui ne tiennent pas, en les signalant. Son ouverture tient en deux phrases :

« *Tout commence en faisant croire que $1 + 1$ donne 2.* »

« *Le neuf n'est pas le zéro : il est la trace intégrale du cycle.* »

21.1 L'amputation primordiale, à six ans

V4.21.1 (L) : la première leçon. L'amputation ne commence pas avec Stevin en 1585 ni avec Gauss en 1801 : elle commence dans chaque vie à six ans, à la première leçon d'arithmétique. L'école pose l'addition comme opération première et évidente : un caillou plus un caillou donne deux cailloux. Or $1 + 1 = 2$ présuppose la séparation des deux unités qu'on additionne ; cette séparation préalable est la véritable opération première, qu'on cache à l'enfant en lui présentant l'addition comme élémentaire. L'opération vraiment première serait de reconnaître que les deux 1 ne sont pas séparés mais inversement liés, et que les additionner rend visible leur liaison. (La Genèse, $1 \oplus 1 = 3$, est au Volume 1.)

F : le sens inné du nombre. Avant l'école, l'enfant porte un sens numérique inné : le nourrisson distingue les ensembles de un, deux et trois objets dès quelques mois (subitisation), et estime au-delà sans énumérer. K. Wynn (*Nature* 358, 749, 1992) a montré que des nourrissons de cinq mois regardent plus longtemps un résultat « impossible » ($1 + 1$ donnant 1 ou 3) qu'un résultat possible. S. Dehaene (*La Bosse des maths*, 1997, révisé en 2010 ; *Le Code de la conscience*, 2014) situe l'arithmétique élémentaire dans le sillon intrapariétal des deux hémisphères, structure partagée avec plusieurs espèces animales. **L :** « *L'école n'apprend pas à compter : elle transmet*

une grammaire culturelle particulière qui se superpose au sens numérique inné en le modifiant. »

V4.21.2 (L) : la soustraction qui n'anéantit pas. « *Et quand ensuite on dit que la soustraction anéantit, alors que cela n'a jamais été observé, même avec leurs outils.* » L'école enseigne que $9 - 3 = 6$ signifie enlever 3, le faire disparaître. Or aucune mesure n'a jamais observé un anéantissement : la matière se transforme, l'énergie se redistribue. **F** : conservation de la masse (A. Lavoisier, 1789 : « rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme ») ; de l'énergie (H. von Helmholtz, 1847) ; de la charge électrique (B. Franklin, XVIIIe siècle) ; de la quantité de mouvement (Newton, 1687) ; du moment angulaire ; des nombres baryonique et leptonique. Dans la grammaire restaurée, la soustraction révèle : $9 - 3 = 6$ ne fait pas disparaître 3, il révèle 6 comme partenaire inverse de 3. Les résultats numériques restent identiques ; seule leur lecture change. *Analogie* : quand le solde d'un compte passe de 900 à 600 euros pour un loyer de 300, les 300 euros n'ont pas disparu, ils sont sur le compte du propriétaire ; la soustraction bancaire révèle un déplacement, elle n'anéantit rien.

V4.21.3 (L) : l'inverse diabolisé. « *On a inversé ce qui nous unit avec ce qui nous sépare, quand c'est plutôt qu'on nous a enlevé l'envie de savoir ce qui nous complète en le diabolisant.* » L'école pose l'addition comme ce qui unit et la soustraction comme ce qui sépare ; la grammaire restaurée renverse : l'addition présuppose la séparation, la soustraction révèle la liaison. L'inverse cadastral constitutif a été projeté au dehors, déclaré étranger, puis diabolisé : le diable, l'ennemi, l'étranger, l'adversaire idéologique sont l'inverse cadastral diabolisé, et le porteur cesse de chercher ce qui le complète parce qu'on lui a appris à le craindre (Volume 11, *L'Indifférence et l'Empathie*).

Objection et réponse. *Objection* : l'arithmétique scolaire fonctionne ; la civilisation industrielle repose sur elle. *Réponse* : elle fonctionne dans le domaine restreint où l'amputation ne produit pas de chocs visibles (calcul commercial, mesure technique, comptabilité) ; la grammaire restaurée ne l'invalide pas dans ce domaine, elle restaure ce qui la rend cohérente là où elle échoue (Volume 3 pour le chaos des calculs tronqués).

21.2 L'horloge à neuf positions, et le zéro

V4.21.4 (L) : l'horloge à neuf positions, pas dix. Qu'on imagine une horloge dont le cadran porterait neuf nombres et pas de zéro, parce que le zéro est ce qui vient après le neuf et recommence le cycle, pas une position du cadran. Quand on atteint la dernière position, on se retrouve au départ pour un nouveau tour, et le nouveau tour porte la mémoire du tour accompli. « *Le zéro n'est pas un nombre, c'est la mémoire d'un cycle accompli. Le neuf n'est pas un effacement, c'est la trace intégrale du parcours 1 à 9.* » Quand on compte 1, 2, ..., 9, 10, 11, le 10 n'est pas une dixième position propre : il est le 1 du second cycle, et le 0 marque que le premier a été accompli.

F : l'histoire du zéro. Les Babyloniens emploient un signe de position vide à partir du IIIe siècle avant notre ère, comme marqueur intercalaire et non comme nombre ; Brahmagupta traite le zéro comme nombre opératoire en 628 ; la notation passe par

al-Khwarizmi au IXe siècle et arrive en Europe avec Fibonacci (*Liber Abaci*, 1202). Sans zéro, on ne distingue pas 1024 de 124 ou de 1240 : l'efficacité notationnelle est indiscutable ; le statut ontologique, lui, reste ambigu.

Correction (Annexe B). Le Livre II affirmait que « toute civilisation qui a inventé un système de numération positionnelle a abouti à neuf chiffres natifs » (Sumer, Babylone, Égypte, Maya, Inde, Arabie, Chine), « sans exception documentée » (en citant G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*). C'est inexact : la numération babylonienne est positionnelle en base 60 (cinquante-neuf signes composés), la maya en base 20 (dix-neuf signes et un zéro), l'égyptienne n'est pas positionnelle. Ce qui est vrai est plus étroit : la numération indienne, transmise par les Arabes, et la numération chinoise à baguettes écrivent neuf chiffres et un vide. La lecture du Livre II (les inscripteurs anciens auraient reconnu nativement les neuf positions) reste une Lecture, appuyée sur cette lignée seulement.

V4.21.5 (L) : pourquoi neuf. Le Livre II distingue la base d'écriture (convention : 10, 12, 16, 60) de la structure cadastrale fermée, qui porte sur la classe de l'entier selon 9 et ne dépend d'aucune base (Axiome A0, section 21.4). Sa *réponse géométrique* : le cercle unité porte neuf racines neuvièmes de l'unité, la dixième revenant à la première, et $9 = 3^2$ inscrit l'axe {3, 6, 9} comme double de l'axe {3}, ce que ni 10, ni 12, ni 16 ne reproduisent. Sa *réponse arithmétique* (« 9 est le seul entier sous 100 qui soit un carré, d'un seul facteur premier, aux diviseurs propres 1 et 3 ») ne discrimine pas : 25 et 49 partagent les deux premières propriétés, et la troisième est la définition même de 9 (Annexe B). La réponse démontrée est celle du Tome I : 9 est la seule fermeture où l'axe a un ordre égal à son indice (V4.2.10). *Bases secondaires (L)* : $12 = 9 + 3 = 4 \times 3$ (quatre paires et l'axe minimal) ; $16 = 9 + 7 = 4^2$; $60 = 9 \times 6 + 6 = 4 \times 15$ (la source lit 15 comme la somme des positions de l'axe, qui vaut en fait $3 + 6 + 9 = 18$: Annexe B).

21.3 Les quatre paires et leurs fonctions

V4.21.6 (Th pour les nombres, L pour les fonctions). La table des paires, avec leurs différences internes et les lectures du Livre II :

paire	somme	différence	lecture
(1, 8)	9	7	ouverture / cristallisation
(2, 7)	9	5	relation / envergure en mouvement
(3, 6)	9	3	témoin / équilibre
(4, 5)	9	1	barycentre serré / pivot

Le 1 inscrit l'ouverture, le 8 la cristallisation, la position juste avant la clôture ; le 2 la première dualité, le 7 la dynamique en mouvement maximal ; le 3 le témoin, première position de l'axe, le 6 l'équilibre ; le 4 et le 5, les positions les plus proches du barycentre, le pivot resserré. (Le Livre II dit aussi du 6 qu'il est « la position centrale, milieu géométrique des neuf positions » : le milieu des neuf positions est 5, et le centre de l'involution 4,5 ; la phrase est corrigée, Annexe B. Les sens complets des positions sont au Volume 1, *La Sémantique des Neuf Positions*.)

V4.21.7 (L) : le barycentre comme miroir de lui-même. « *Le barycentre est son propre inverse : il est le miroir de lui-même, le point où les deux cercles se touchent sans se confondre.* » $\varphi(4,5) = 9 - 4,5 = 4,5$. Le Livre II y lit la grammaire de la conscience repliée (Livre V ; Volume 10) : quand la conscience se réfléchit sur elle-même, elle reste identique à soi.

21.4 L'Axiome A0 et ses trois preuves

V4.21.8 (Th) : la racine digitale comme position dans le cycle des neuf. *Définition* : pour $n > 0$, $DR(n)$ est l'unique élément de $\{1, \dots, 9\}$ qui laisse le même reste que n dans la division par 9, avec $DR(n) = 9$ lorsque n est multiple de 9 : c'est le cycle des neuf restes avec la clôture en 9 plutôt qu'en 0. L'équivalence avec « somme des chiffres jusqu'à un chiffre » ne vaut qu'en base 10 ; la position cadastrale, elle, ne dépend d'aucune base. *Trois preuves de l'invariance* : (1) dans toute base b , la somme itérée des chiffres donne le reste de n par $b - 1$; en base 10, le reste par 9 ; la somme des chiffres n'est que la voie de calcul économique de la base 10 ; (2) une permutation des chiffres conserve la somme des chiffres, donc la position : 1234 et 4321 occupent la même position ; (3) tout entier s'écrit de manière unique $n = 9k + r$, $r \in \{1, \dots, 9\}$ (le reste nul étant écrit 9 par la clôture), sans référence à aucune base. **F** : le cycle des restes par 9 est étudié partout indépendamment de la notation décimale (S. Lang, *Algebra*, 3e éd., 2002). **Conséquence** : les signatures du corpus (racine 8 des produits de jumeaux, racine 5 des produits de premiers cousins, rail $\{1, 4, 7\}$ des carrés de premiers, lecture du fer $Z = 26$, codons $64 = 8 \times 8$) portent sur cette structure invariante. « *La grammaire cadastrale est mathématique au sens fort, pas numérologique au sens faible* » (Volume 1, *Pourquoi ce n'est pas de la numérologie*).

21.5 Les rails multiplicatifs et l'axe régulateur

V4.21.9 (Th) : le rail D est un sous-groupe. Le rail $D = \{1, 4, 7\}$ est clos pour la multiplication : $1 \times 4 = 4$, $1 \times 7 = 7$, $4 \times 4 = 16 \rightarrow 7$, $4 \times 7 = 28 \rightarrow 1$, $7 \times 7 = 49 \rightarrow 4$. C'est le sous-groupe d'ordre 3 du groupe des six positions inversibles. **L** : c'est le rail de la sédimentation, de ce qui se dépose et devient matière stable.

V4.21.10 (Th) : le rail G est D doublé. $G = 2 \times D$: $2 \times 1 = 2$, $2 \times 4 = 8$, $2 \times 7 = 14 \rightarrow 5$. Les règles de produit : $G \times G = D$, $D \times D = D$, $D \times G = G$. **L** : G porte ce qui se déploie ; D et G sont complémentaires comme l'inspiration et l'expiration.

V4.21.11 (Th) : l'axe est l'idéal du 3. Multiplier n'importe quelle position par 3 donne un résultat dans l'axe : $1 \times 3 = 3$, $2 \times 3 = 6$, $4 \times 3 = 12 \rightarrow 3$, $5 \times 3 = 15 \rightarrow 6$, $7 \times 3 = 21 \rightarrow 3$, $8 \times 3 = 24 \rightarrow 6$. **L** : l'axe ne sédimente pas et ne déploie pas, il régule : « *Le 3 relie, le 6 régule, le 9 ferme.* » **F** : la règle de divisibilité par 3 (somme des chiffres divisible par 3) en est la conséquence scolaire (J. H. Conway et R. Guy, *The Book of Numbers*, 1996, donnent les propriétés des restes par 9 sans cette lecture).

V4.21.12 (Th) : les carrés de premiers, au cas par cas. Tout premier au-delà de 3 a sa racine dans $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. Six cas : $DR(p) = 1$ donne $DR(p^2) = 1$; 2 donne 4 ; 4 donne $16 \rightarrow 7$; 5 donne $25 \rightarrow 7$; 7 donne $49 \rightarrow 4$; 8 donne $64 \rightarrow 1$. Tous dans le rail

D. Exemples : $5^2 = 25 \rightarrow 7$; $7^2 = 49 \rightarrow 4$; $11^2 = 121 \rightarrow 4$; $13^2 = 169 \rightarrow 7$; $17^2 = 289 \rightarrow 1$; $19^2 = 361 \rightarrow 1$; $23^2 = 529 \rightarrow 7$; $29^2 = 841 \rightarrow 4$; $31^2 = 961 \rightarrow 7$; $37^2 = 1\ 369 \rightarrow 1$. (C'est le Théorème 6 lu cas par cas.)

Citation attribuée. Le Livre II cite une phrase attribuée à Nikola Tesla : « *If you only knew the magnificence of the 3, 6 and 9, then you would have a key to the universe.* » Cette attribution n'est documentée par aucune source primaire connue ; elle est gardée comme citation attribuée, sans valeur de reçu (Annexe B).

21.6 La table de multiplication cadastrale

V4.21.13 (Th) : la table par neuf. La racine de tout produit par 9 est 9, et les chiffres successifs des produits écrivent les quatre paires, puis les retournent :

$n \times 9$	09	18	27	36	45	54	63	72	81	90
chiffres	0, 9	1, 8	2, 7	3, 6	4, 5	5, 4	6, 3	7, 2	8, 1	9, 0

« *La multiplication scolaire élémentaire porte intégralement la grammaire cadastrale.* »

V4.21.14 (Th) : la table générale en racines.

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Les lignes a et 9 – a sont inverses terme à terme (leurs entrées somment à 9, le 9 restant 9) : la ligne 5 est l'inverse de la ligne 4, la ligne 7 de la ligne 2, la ligne 8 de la ligne 1, la ligne 6 de la ligne 3 ; la ligne 9 est constante (refait pour ce volume). Sur les huit premières colonnes, l'inverse est aussi le renversement, pour les quatre paires de lignes : $a \times (9 - k)$ et $(9 - a) \times k$ ont la même racine, si bien que la ligne 9 – a est la ligne a lue à l'envers (87654321 et 12345678, 75318642 et 24681357, 63963963 et 36936936, 51627384 et 48372615 ; V4.2.7). « *Neuf lignes. Quatre paires dynamiques et une statique (le 9 fixe).* » La table est l'inscription du Livre II tout entier dans une seule grille ; c'est d'elle que le cadastre est lu, non posé. Elle porte aussi la membrane $\times 9$ de la cinquième paire (CP 7, chapitre 20).

21.7 Les chemins du $\frac{1}{2}$

V4.21.15 (Th, avec corrections) : les sept chemins. Le Livre II annonce que $k_{\text{arc}} = \frac{1}{2}$ se retrouve par sept chemins indépendants. Examinés un par un :

1. $4,5 / 9 = \frac{1}{2}$, le barycentre rapporté à la clôture (exact, V4.2.3) ;
2. $3,5 / 7 = \frac{1}{2}$, le demi-écart de la paire maximale (1, 8) rapporté à son écart (exact) ;
3. pour chaque paire, demi-écart sur écart : $2,5/5$, $1,5/3$, $0,5/1$ (exact, mais c'est le même fait que le chemin 2 : tout demi-écart rapporté à son écart vaut $\frac{1}{2}$) ;
4. le centre positionnel de 12345678 est entre la quatrième et la cinquième position, en 4,5 ; la source le rapporte à 9 « en comptant les neuf intervalles dont huit chiffres et un horizon de clôture » (exact sous cette convention, qui revient au chemin 1) ;
5. les centres des trois rails, 4, 5 et 6, ont pour centre commun 5, et $5/9$ n'est pas $\frac{1}{2}$: la source le reconnaît (« la convergence ici n'est pas exacte ») ; ce chemin est retiré (Annexe B) ;
6. $11/\pi = 3,5$ quand π est écrit $22/7$ (exact sous la convention $22/7$ du corpus, Volume 2), et 3,5 est le demi-écart de la paire maximale ;
7. $5,5 / 11 = \frac{1}{2}$, le barycentre de 0 à 11 rapporté à 11, la clôture étendue (exact).

Bilan : le $\frac{1}{2}$ est atteint exactement par les chemins 1, 2, 3, 4, 6 et 7, dont plusieurs sont des variantes du même rapport « centre sur longueur » ; le chemin 5 ne l'atteint pas. **L** : la convergence est lue par le Livre II comme la signature d'un invariant, « *exactement comme la cohérence se livre par sept chemins* » (sept jours, sept notes, sept couleurs).

V4.21.16 (L) : le $\frac{1}{2}$ dans la physique et dans la géométrie. *Le spin $\frac{1}{2}$ des fermions* (P. A. M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society A* 117, 610, 1928, F) est lu comme k_{arc} : le coût géométrique de la lecture d'un état à trois dimensions à travers une interface à deux dimensions, la rotation de 720° étant lue comme l'artefact d'un instrument qui ne lit qu'un pôle à la fois (Volume 7). *La droite critique de Riemann* $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ est lue comme k_{arc} (Th 9 et chapitre 7 ; le Livre II mentionne une « preuve de l'hypothèse de Riemann » v4.5 du corpus : son statut est examiné au Volume 5, et il reste ici celui d'une Lecture). *Le triangle équilatéral* : le rapport du rayon inscrit au rayon circonscrit vaut exactement $\frac{1}{2}$ (F, Euclide).

V4.21.17 (Th) : le produit du barycentre par les écarts. Pour chaque paire (k , $9 - k$), le produit $4,5 \times \text{écart}$ vaut 4,5 ; 13,5 ; 22,5 ; 31,5 pour les écarts 1, 3, 5, 7 ; doublés, 9, 27, 45, 63, une suite arithmétique de raison $18 = 2 \times 9$ (refait pour ce volume). Et $31,5 / 9 = 3,5 = 7/2$; $31,5 \times 2 = 63$, de racine 9 ; la paire (63, 36) somme à 99 et diffère de $27 = 3^3$, le numéro du cobalt (chapitre 13, V4.13.24). **Correction (Annexe B)** : le Livre II associait 31,5 à « la durée moyenne d'un cycle solaire double (cycle de Hale [...]) » ; le cycle de Hale dure environ 22 ans, la phrase est retirée ; la fréquence nominale 31,5 Hz des bandes de tiers d'octave normalisées (ISO 266) est exacte comme valeur nominale, et reste une coïncidence déclarée (la source dit elle-même qu'« aucune de ces inscriptions n'est causale »).

F et L : le rapport d'Archimède. Archimède (*De la sphère et du cylindre*, vers 250 avant notre ère) démontre que la sphère inscrite dans un cylindre de hauteur égale

au diamètre en occupe les deux tiers ; il fit graver la figure sur sa tombe, que Cicéron dit avoir retrouvée à Syracuse en 75 avant notre ère (*Tusculanes*, V, 64-66). **L** : le rayon de la sphère est la moitié de la hauteur (k_{arc}), et le rapport $3/2$ du cylindre à la sphère est lu comme le rapport de l'axe au rail G (3 sur 2) : une convergence géométrique, par voie disjointe, avec ce que k_{arc} inscrit arithmétiquement.

21.8 Les trois rails comme cycles dynamiques

V4.21.18 (Th et L). Lu cycliquement, chaque rail démarre par son centre interne puis tourne : G par 5, puis 8, puis 2 ; l'axe par 6, puis 9, puis 3 ; D par 4, puis 7, puis 1 (Th : $5 = (2 + 5 + 8)/3$, $6 = (3 + 6 + 9)/3$, $4 = (1 + 4 + 7)/3$). Les trois cycles s'entrelacent dans le cadastre : 1 dans D, 2 dans G, 3 dans l'axe, 4 dans D, et ainsi de suite. **L** : le Livre II y lit une grammaire qui se retrouverait à toutes les échelles : deux brins d'ADN en tension inverse et le milieu cellulaire comme troisième cycle ; les trois sites A, P et E du ribosome, que l'ARN de transfert traverse dans l'ordre (F : T. Steitz et A. Yonath, prix Nobel 2009 ; *Science* 289, 905, 2000 ; *Nature* 407, 340, 2000). La source précise : « *inscription empirique à valider par croisement avec la biologie moléculaire* » (Volume 9).

21.9 Les triplets miroirs

V4.21.19 (Th). $234 + 432 = 666$; $567 + 765 = 1\ 332 = 2 \times 666$; $891 + 198 = 1\ 089 = 33^2$. Les trois rangées du pavé tordu, ajoutées à leur renversé : les deux premières font des « dipôles » (l'axe 6 écrit trois fois, puis son double), la troisième est autonome et donne le carré de 33. **L** : 33 est une inscription particulière du corpus : 137 est le 33e premier, $33 \times 6 = 198$ est le gradient, et la colonne vertébrale humaine compte usuellement 33 vertèbres (F, en comptant les vertèbres soudées du sacrum et du coccyx). *Note sur 198* : « *il n'est pas une mesure expérimentale à valider, mais une identité interne du cadastre* » : $198 = 2 \times 99 = 2 \times 9 \times 11$ (chapitre 19). (La source disait « postulat intrinsèque » ; c'est une identité, Annexe B.)

21.10 L'auto-réflexion du carré 3×3

V4.21.20 (Th). Dans le pavé normal 123 / 456 / 789, la somme des extrêmes de chaque ligne révèle le rail D : $1 + 3 = 4$; $4 + 6 = 10 \rightarrow 1$; $7 + 9 = 16 \rightarrow 7$. Et les nombres $6k + 1$ ont des racines qui tournent strictement sur 1, 7, 4, 1, 7, 4 ($k = 0, 1, 2, \dots$: 1, 7, 13, 19, 25, ...) : le rail D est la signature des premiers de forme $6k + 1$ (Th 8). **L** : « *Le cadastre s'auto-réfléchit en révélant l'axe arithmétique premier qui le sous-tend.* »

21.11 Le triplet secret 578

V4.21.21 (Th). Les multiples du triplet d'ouverture, $1 \times 123 = 123$, $2 \times 123 = 246$, $3 \times 123 = 369$, parcourent six positions, 1, 2, 3, 4, 6, 9. Trois positions n'apparaissent dans aucun : 5, 7 et 8, le triplet manquant 578. Son produit : $5 \times 7 \times 8 = 280$; sa

somme : $5 + 7 + 8 = 20$, de racine 2. Les paires du cycle de 1 à 10, (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), somment toutes à 11, de racine 2 ; 20 atteint la racine 2 sans passer par 11.

F. La durée de la grossesse humaine est d'environ 280 jours entre la date des dernières règles et la naissance (A. M. Jukic et collègues, *Human Reproduction* 28, 2848, 2013), soit 40 semaines ; $280 = 28 \times 10$, et 28 est le deuxième nombre parfait. Le Livre II ajoutait que 28 est « la durée du cycle lunaire » : le mois synodique dure 29,53 jours (le mois sidéral 27,32) ; c'est le cycle menstruel qui est usuellement compté sur 28 jours (Annexe B).

V4.21.22 (L) : mouvement et continuité. Les trois premiers triplets opèrent par multiplication scalaire (l'espace, la mémoire, la régulation) ; le triplet 578 opère par multiplication interne de ses positions, et transforme les positions en durée continue. « *Quatre triplets cadastraux fondateurs qui inscrivent les quatre dimensions opératoires du réel : 123 (espace), 246 (mémoire), 369 (régulation), 578 (mouvement-continuité).* »

21.12 La cascade des quinze ruptures (résumé)

V4.21.23 (L). Le Livre II articule l'histoire de l'amputation en quinze ruptures épistémologiques : six gestes principaux, Stevin (1585, *De Thiende*, trente-six pages, la décimalisation infinie), Viète (1591, l'abstraction symbolique), Descartes (1633, le retrait du *Monde* après la condamnation de Galilée, et 1637, la séparation de l'étendue et de la pensée ; lettre à Mersenne d'avril 1634, Adam-Tannery I, 285), Newton (1687, l'action à distance, qu'il nomme lui-même « *so great an absurdity* » dans une lettre à Bentley de 1693), Gauss (1801, l'identification du 9 au 0) et Napoléon (1799-1815, le système métrique décimal et le Code civil du 21 mars 1804) ; puis neuf ruptures complémentaires : Fourier (1822), Riemann (1854, l'intégrale comme limite de sommes), Clausius (1865), Planck (14 décembre 1900), Heisenberg, Schrödinger et von Neumann (1925 à 1932), Shannon (1948), la norme IEEE 754 (1985), le modèle standard (1965-1973, dix-neuf paramètres libres) et la délégation algorithmique (depuis 1980). « *Chaque rupture préparait la suivante. Le résultat cumulé est une civilisation qui opère dans une grammaire amputée sans s'en apercevoir, et qui prend ses amputations pour la mesure même du progrès.* » Statut : Lecture historique. Le développement de cette cascade est au Volume 6, *L'Histoire de la Preuve* ; la thèse sur les calculs flottants et le chaos (la même équation logistique, chaotique en arithmétique IEEE 754, ne l'est pas en arithmétique rationnelle exacte) est au Volume 3, *Le Code et le Registre*.

Coda

« *Cette architecture n'est pas construction théorique. Elle est lecture stricte de la structure des entiers, vérifiable par opération directe à toutes les positions. Aucune convention humaine n'est nécessaire pour qu'elle opère. Elle opère dans les nombres eux-mêmes.* »

« *La marche continue.* »

Chapitre 22. La congruence des paires : le mod qui garde les inverses

Pièce entrée mot pour mot dans ce volume le 26 octobre 2026. Son en-tête, tel qu'elle le porte :

La congruence des paires. Le mod qui garde les inverses : cinq classes, une seule opération interne, réalisée par le carré, cyclique d'ordre trois · Filipe Bastos Architecture de la Cohérence Relationnelle (ARC) · D2technologie Inc. Corpus ARC, Théorie des Nombres, Tome I · Version 0.2 · 11 septembre 2026 · CC BY 4.0 · Zenodo Rédigé avec l'instance-scribe (Claude) selon le protocole œil/scribe du corpus. Le cœur (parties 1 à 6) porte les résultats et leurs statuts ; l'appareil est en annexes.

Résumé

L'arithmétique modulaire de Gauss place 1 et 8 dans deux classes qui s'ignorent, et confond la clôture 9 avec zéro. Le cadastre ARC les tient pour une paire d'inverses, échos à place tournée dont la somme est la clôture. Ce document construit la congruence qui garde les paires et dit exactement ce qu'elle est. Définition : $n \equiv m$ si $DR(n) = DR(m)$ ou $DR(n) + DR(m) = 9$. Cinq classes : $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$, $\{9\}$. Théorème 1 : cette congruence est compatible avec la multiplication et incompatible avec l'addition ; $1 + 2 = 3$ et $8 + 2 \rightarrow 1$ tombent dans des classes différentes, parce que la somme d'une paire est la clôture, et qu'additionner des paires n'est pas une loi interne mais le geste qui ferme, la soustraction trinitaire. Théorème 2 : la congruence est réalisée par le carré, $x \mapsto DR(x^2)$, dont les fibres sont exactement les paires (Le Carré Notifié) et dont l'image est le rail $D \cup \{9\}$. Théorème 3 : sur cette image, les classes de paires forment un groupe cyclique d'ordre trois engendré par 4, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$, et $4 \times 7 = 28 \equiv 1$: le 4 et le 7 sont inverses au sens multiplicatif. Conclusion : le « vrai mod » a deux faces qui ne se réduisent pas l'une à l'autre. Pour l'addition, le cadastre entier avec son rang, $n = 9k + DR(n)$, rien jeté (La Cinquième Paire, Théorème 2.1). Pour la multiplication, le cadastre replié par l'involution, cinq classes, réalisé par le carré, cyclique d'ordre trois. Le mod de Gauss est ce qu'on obtient en forçant les deux faces dans une seule structure au prix de la clôture et des paires. Quatorze assertions au build. Mots-clés : congruence, racine digitale, involution, paires d'inverses, carré, groupe cyclique, rail D, soustraction

trinitaire, Gauss, ARC.

0. Statuts et conventions

Théorème : calcul fini vérifié par assertion exécutée (annexe B). Lecture : interprétation déclarée. $DR(n)$ est la racine digitale, résidu modulo 9 avec $DR(9m) = 9$. Les paires (1,8) (2,7) (3,6) (4,5) sont des inverses : échos à place tournée dont la relation ferme sur une constante, 9 pour la somme ; « échos et compléments » reste synonyme. Rails $D = \{1, 4, 7\}$, $G = \{2, 5, 8\}$, axe $\{3, 6, 9\}$.

1. Ce que le mod de Gauss jette

Pour Gauss, $n \equiv m \pmod{9}$ si 9 divise $n - m$; neuf classes, et la classe de 9 est celle de 0. Deux choses sont jetées. Le compte des tours, k dans $n = 9k + r$: la Cinquième Paire l'appelle le circonscrit, et le rendre est la bijection $n = 9k + DR(n)$, rien perdu, vérifiée au build sur cent mille entiers. Et l'appariement : 1 et 8, 2 et 7, 3 et 6, 4 et 5 sont dans le mod de Gauss huit classes indépendantes, alors qu'elles sont quatre paires dont chacune somme à la clôture. Le mod voit les résidus ; il ne voit pas qu'ils se répondent.

2. La congruence qui garde les paires

Définition. $n \equiv m$ si $DR(n) = DR(m)$ ou $DR(n) + DR(m) = 9$. Les classes sont $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ et $\{9\}$: le cadastre replié sur son involution $\varphi(x) = 9 - x$, chaque paire devenue une seule adresse, la clôture restant seule. Cinq classes, la moitié de neuf plus le centre, comme la moitié du carré plus la diagonale.

Planche. Les nombres parlent en relation. On multiplie, on réduit en racine digitale, on lit. Rien de ce qui suit n'a été choisi : les tables $\times a$ et $\times(9 - a)$ sont miroirs colonne par colonne, leurs sommes font 9 partout et 18 sur la clôture, les rails lus comme entiers somment à 99 999 999, l'axe déborde parce qu'il contient des 9, la table $\times 9$ est son propre miroir, les paires ont le même carré, et le cube ne connaît que la paire (1, 8) et la clôture.

	k=	2	3	4	5	6	7	8	9	lu comme entier
$\times 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12345678
$\times 8$	8	7	6	5	4	3	2	1	9	87654321
Σ	9	9	9	9	9	9	9	9	18	99999999
$\times 2$	2	4	6	8	1	3	5	7	9	24681357
$\times 7$	7	5	3	1	8	6	4	2	9	75318642
Σ	9	9	9	9	9	9	9	9	18	99999999
$\times 3$	3	6	9	3	6	9	3	6	9	36936936
$\times 6$	6	3	9	6	3	9	6	3	9	63963963
Σ	9	9	18	9	9	18	9	9	18	100900899
$\times 4$	4	8	3	7	2	6	1	5	9	48372615
$\times 5$	5	1	6	2	7	3	8	4	9	51627384
Σ	9	9	9	9	9	9	9	9	18	99999999
$\times 9$	9	9	9	9	9	9	9	9	9	son propre miroir
k^2	1	4	9	7	7	9	4	1	9	les paires ont le même carré
k^3	1	8	9	1	8	9	1	8	9	{1, 8, 9} : la paire et la clôture

3. Théorème 1 : une seule opération interne

La congruence des paires est compatible avec la multiplication : si $a \equiv a'$ et $b \equiv b'$, alors $ab \equiv a'b'$, vérifié sur les 6561 combinaisons. Elle n'est pas compatible avec l'addition : $1 + 2 = 3$, mais $8 + 2 = 10 \rightarrow 1$, et 3 et 1 sont dans des classes différentes. La raison est structurelle et elle est celle du corpus. La somme d'une paire est 9 : $a + \varphi(a) = 9$ pour tout a . Additionner des inverses ne donne pas un habitant du cadastre, ça donne la clôture. L'addition sur les paires n'est donc pas une loi interne ; c'est le geste qui ferme, la soustraction trinitaire, $1 - 1 = 11$, deux termes gardés face à face et un tiers libéré. Le mod de Gauss « marche » avec l'addition précisément parce qu'il a jeté les paires ; dès qu'on les garde, l'addition change de nature. Statut : Théorème pour les deux compatibilités ; Lecture pour « l'addition des paires est la fermeture ».

4. Théorème 2 : la congruence est réalisée par le carré

L'application $x \mapsto DR(x^2)$ envoie 1 et 8 sur 1, 2 et 7 sur 4, 4 et 5 sur 7, et 3, 6, 9 sur 9. Ses fibres sont exactement les classes de la congruence des paires, parce que $(9 - x)^2 = 81 - 18x + x^2 \equiv x^2$: c'est le Théorème des fibres du Carré Notifié, lu comme quotient. Le carré est la congruence des paires réalisée par une opération, et son image est le rail D avec la clôture, $\{1, 4, 7, 9\}$. Le rail G disparaît dans l'image : le carré projette G sur D. Statut : Théorème.

5. Théorème 3 : cyclique d'ordre trois

Sur l'image, les trois classes de paires forment un groupe pour la multiplication, cyclique d'ordre trois, engendré par 4 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$. C'est le groupe des unités modulo 9, cyclique d'ordre six, quotienté par ± 1 , c'est-à-dire par l'involution. Et $4 \times 7 = 28 \equiv 1$: le 4 et le 7 sont inverses au sens multiplicatif, leur produit ferme sur l'unité, et ce produit est le second nombre parfait (Le Sept, §4). Les paires qui ferment sur 1 par le produit sont (1,1), (2,5), (4,7), (8,8) ; celles qui ferment sur 9 par la somme sont les quatre paires de l'involution. Deux clôtures, deux appariements, et le 28 à leur croisée. Statut : Théorème.

6. Ce qu'est le vrai mod

Il a deux faces qui ne se réduisent pas l'une à l'autre. Pour l'addition : le cadastre entier avec son rang, $n = 9k + DR(n)$, le circonscrit et l'inscrit gardés, rien jeté ; c'est la bijection de la Cinquième Paire, et l'addition y est ordinaire parce qu'on n'a rien replié. Pour la multiplication : le cadastre replié par l'involution, cinq classes, réalisé par le carré, cyclique d'ordre trois sur le rail D. Le mod de Gauss est ce qu'on obtient en forçant les deux faces dans une seule structure : il garde l'addition en jetant la clôture, et garde la multiplication en jetant les paires. Le prix est ce que le corpus reproche depuis le premier document, $9 \equiv 0$ et 18 confondu avec 81. Lecture : le 3 revient comme ordre du système des paires. Trois classes vivantes sur le rail, trois pas pour revenir à 1, et la même brique qui fait le cube et qui ne rentre pas dans 2. Critère de chute de la Lecture : une clôture $c \neq 9$ dont le quotient par l'involution

donnerait un groupe d'ordre autre que $(\varphi(c))/2$ avec la même structure de fibres du carré ; pour $c = 9$ le calcul est exact.

Annexes

Annexe A. Journal exécuté au build (11 septembre 2026)

Quatorze assertions, toutes passées : partition en cinq classes ; $a \equiv 9 - a$; compatibilité avec $\times$ sur 6561 combinaisons ; incompatibilité avec $+$ (3 contre 1) ; somme d'une paire = 9 ; fibres du carré = $\{1:1, 2:4, 3:9, 4:7, 5:7, 6:9, 7:4, 8:1, 9:9\}$; $(9 - a)^2 \equiv a^2$; puissances de 4 : 1, 4, 7, 1 ; $4 \times 7 \equiv 1$; bijection $n = 9k + DR(n)$ sur 10^5 entiers ; Gauss sépare 1 et 8 et confond 9 et 0 ; unités modulo 9 : six, quotient par ± 1 : trois.

Annexe B. Protocole

R10, R11 et règle de structure : voir Errata et précisions du corpus ARC, septembre 2026, partie 0. Aucune probabilité n'est attribuée à l'objet.

Annexe C. Pièces du corpus

Le Carré Notifié v0.3 (fibres du carré) ; La Cinquième Paire v1.0 (bijection des deux regards, Th 2.1) ; Le Sept v0.1 ($28 = 4 \times 7$) ; The Trinitarian Subtraction ($1 - 1 = 11$) ; La Genèse v0.3 ; Errata et précisions du corpus ARC, septembre 2026.

Annexe D. Notes de révision

v0.1, 11 septembre 2026 : première inscription. v0.2, même jour : ajout de la planche des tables, à la demande de l'auteur, pour que les nombres se montrent avant qu'on les commente.

Annexe A. Table des énoncés

Tous les énoncés du volume, dans l'ordre des chapitres, avec leur identifiant (numéro du corpus quand il existe, identifiant de volume *V4.chapitre.rang* sinon), un résumé en une ligne, leur statut et leur chapitre. Th : théorème ; L : lecture ; P : prédiction ; F : fait de la science reçue ; Chantier : question ouverte nommée.

identifiant	énoncé	statut	chapitre
V4.1.1	L'axe stérile : aucun premier > 3 de racine 3, 6 ou 9	Th	1
V4.1.2	La boucle-9 interdite : aucun premier de somme des chiffres 9	Th	1
V4.1.3	Les premiers > 3 vivent sur deux rails ; la grille $6k \pm 1$ est le résidu de deux exclusions	Th	1
V4.1.4	Les deux mains face à face réalisent $\varphi(x) = 9 - x$, barycentre dans l'interstice	L	1
V4.1.5	Un enfant de neuf ans muni de la feuille identifie l'axe stérile en une session	P	1
V4.1.6	Strate 1 : l'absorption instrumentale (Gauss 1801)	L	1
V4.1.7	Strate 2 : la transparence de la notation (Stevin 1585)	L	1
V4.1.8	Strate 3 : le déplacement de la question (après Riemann)	L	1
V4.1.9	Le mystère des premiers comme produit dérivé du prestige analytique	L	1
V4.2.1	Formalisation : axe = sous-groupe $\langle 3 \rangle$, rails = classes latérales, quotient = loi des flux	Th	2
V4.2.2	Les cinq lectures de la table des inversions (somme 9, centre 4,5, 9 auto-inverse, écarts 7-5-3-1, total 45)	Th	2
V4.2.3	Le $\frac{1}{2}$ dérivé deux fois : 4,5/9 et 3,5/7	Th	2
V4.2.4	Le cube détecteur de classe : $D \rightarrow 1$, $G \rightarrow 8$, axe $\rightarrow 9$	Th	2
V4.2.5	Le pavé tordu : la racine d'un trio ne dépend que de son ancrage ; toute agrégation linéaire atterrit sur l'axe	Th	2
V4.2.6	L'axe porte les transformations, les rails portent les êtres	L	2
V4.2.7	La paire d'inversions 48372615 / 51627384 : φ -palindrome, somme 99 999 999	Th	2
V4.2.8	La descente de la matière porte sa remontée	L	2
V4.2.9	Invariance de base : la structure de fermeture existe dans toute base $b \geq 4$	Th	2
V4.2.10	Singularité de la fermeture 9 : seule fermeture $3k$ où l'axe a un ordre égal à son indice	Th	2

identifiant	énoncé	statut	chapitre
V4.2.11	Inversion causale : la base 10 est l'inscription minimale de la fermeture équilibrée	L	2
V4.2.12	Les théorèmes de la grille portent sur $\mathbb{Z}$, sans base	Th	2
V4.2.13	L'infini fabriqué : $1/7 = 0,1$ en base 7, $1/3 = 0,1$ en base 3	Th	2
Th 1	Auto-génération de la grille : $12m \rightarrow P_{2m}$, $12m + 6 \rightarrow P_{2m+1}$	Th	3
V4.3.1	La position des candidats n'a jamais été cachée	L	3
Th 2	Les quatre familles $k = 6ab \pm a \pm b$ énumèrent exactement les delfines	Th	3
Th 2	Complétude : aucune cinquième famille ; structure de groupe de Klein, branche = produit des signes	Th	3
Th 3	Premier = indice hors-famille : soustraction exacte, décidable dans les deux sens	Th	3
V4.3.2	Rien ne survit, tout se déduit	L	3
Th 4	Décision par le point d'équilibre de la paire génératrice (même coût que la roue, autre sens)	Th	3
V4.3.3	Bilan : système complet dans les deux directions	Th	3
Th 5	Le rythme 24 : $p^2 = 24k + 1$ pour tout premier $p \geq 5$; carrés sur le rail D, écarts multiples de 24	Th	4
Th 5	Maximalité : les modules à unités toutes involutives sont les diviseurs de 24 (Carmichael)	Th	4
V4.4.1	L'horloge des carrés battue par les fondateurs 2 et 3 ($8 \times 3 = 24$)	L	4
V4.4.2	La hiérarchie des horloges 12, 24, 4	Th	4
Th 6	La chrysalide : effondrement conjugué, confluence des rails dans D, porte du 1, oscillation $4 \leftrightarrow 7$	Th	4
Th 6	La porte à un bit : le carré efface exactement le bit de conjugaison	Th	4
V4.4.3	Le clin d'œil EPR : indiscernabilité des conjugués après élévation	L	4
V4.4.4	Deux amnésies distinctes : le tour ($9 \equiv 0$) et le côté de la paire (le carré)	L	4
Th 7	Prédicat $J(k)$: $(6k - 1, 6k + 1)$ jumelle $\iff k$ hors des quatre familles (37 915 paires sous 10^6 , 152 890 sous 5×10^6)	Th	5
Th 8	Disjonction des rails : $6k - 1$ sur G, $6k + 1$ sur D ; aucun diviseur commun $p > 3$	Th	5
Th 8	Phases conjuguées : l'onde p touche les branches en $k = u + p \cdot t$ et $k = (p - u) + p \cdot t$	Th	5
V4.5.1	Les familles comme ondes ; jumeaux = positions laissées intactes	L	5
V4.5.2	Lemme de non-saturation (infinitude des jumeaux), de même difficulté que la conjecture ; obstruction de parité nommée	Chantier	5
Th 11	Fonction successeur : équation de primalité en produit de soustractions de familles ; $S(10^{12}) = 1\,000\,000\,000\,039$	Th	6
Th 12	Machine à pointage avant : mêmes 148 933 premiers sous 2×10^6 , $\times 10,7$	Th	6

identifiant	énoncé	statut	chapitre
V4.6.1	Le fractal vivant : la rue, les lignes de bus, les arrêts sans bus	L	6
Th 13 v1	Saut d'étage : comptage en forme close par inclusion-exclusion (424 575 424 577 à $K = 10^{12}$)	Th	6
Th 13 v2	Règle des miroirs $r_S(+1) + r_S(-1) = M_S$; pliage sans phase, e_S borné par 1 ; 973 858 à $K = 10^6$	Th	6
V4.6.2	Chantier n°3 : borner le résidu des phases replié Σe_S	Chantier	6
Th 14	Identité du joint $(6m - 1)(6m + 1) = 36m^2 - 1$, indice $6m^2$, racine 8 toujours	Th	6
V4.6.3	À travers l'axe par l'addition, par-dessus l'axe par le produit	L	6
V4.6.4	Exposant barycentrique mesuré : excursion en (nombre de croisements) ^{1/2}	L	6
V4.6.5	Résonance du joint fondamental : K multiple de 35 met 48 croisements sur 63 en phase (mesure documentée)	Th	6
V4.6.6	Le rejeté était la clef : le joint 35 commande l'interférence	L	6
V4.6.7	Le joint 35 est un terme anonyme du produit d'Euler	L	6
V4.6.8	Le système des quatre équations d'état ; unique inconnue Σe_S	Th	6
Th 15	Auto-annulation de la cohérence : somme signée d'une constante sur un filtre = 0	Th	6
Th 16	Les engrenages : alignements $\leq w^j(X/IM + 1)$; alignement profond interdit	Th	6
V4.6.9	État de la chaîne du chantier n°3 : canaux uniforme et profond coupés	Th	6
Th 10	Invariant Root-9 : la période de $1/p$ ($p > 5$, ou membre de grille premier avec 10) a une somme de chiffres multiple de 9	Th	7
V4.7.1	Le 9 absent de l'être est restitué par son reflet	L	7
Th 9	Correspondance formelle : φ normalisée $x/9 \mapsto 1 - t$, point fixe $1/2$, même structure que $\xi(s) = \xi(1 - s)$	Th	7
V4.7.2	Le monstre amnésique : les cinq objections à l'édifice riemannien (résumé ; Volume 5)	L	7
V4.7.3	La droite critique comme trace analytique du point fixe de φ (Lecture forte)	L	7
V4.7.4	Le principe d'incarnation (Lecture méthodologique)	L	7
V4.7.5	Le test de la queue de Stevin : doubler la fenêtre, mesurer la fonte de l'écart	P	7
V4.7.6	La racine du réflexe manquant est la strate 2	L	7
V4.7.7	Principe de clôture : une structure est définie par ce que ses voisines ne peuvent pas engendrer	L	7
Th 17	= C.1 et C.3 : $DR(3n + 1) \in \{1, 4, 7\}$, compression 3:1 ; l'axe est absorbé à la première frappe et jamais réatteint	Th	8
V4.8.1	La frappe $3n + 1$ est le pas irréversible	L	8
Th 18	= C.2 et C.5 : la moitié est la rotation $\times 5$ du cadastre, cycle $1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, puissances de 2 à l'envers	Th	8

identifiant	énoncé	statut	chapitre
V4.8.2	Compression puis permutation : là où l'information est détruite, seule la descente est possible	L	8
C.4	Seul cycle contenant 1 : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, traversée des paires d'écart 1, 5, 7 ; attracteur (1, 8)	Th	8
C.6	La racine digitale est compatible avec + et $\times$, fermée sous la frappe et sous la moitié (unicité parmi les canaux rétrogradée en L)	Th	8
C.6	La racine digitale comme unique canal invariant parmi trois canaux comparés	L	8
C.7	= Th 14 : le produit de deux jumeaux a pour racine 8	Th	8
V4.8.3	Sentinelle 37 : $v_2(3n + 1)$ n'est pas fonction du reste par 36 ($v_2(4) = 2$, $v_2(112) = 4$)	Th	8
V4.8.4	Sentinelle 31 : quatre pas de croissance ; $2^k - 1$ monte k - 1 fois ; 27 culmine à 9 232	Th	8
Th 21	Dichotomie du quart : $n = 4t + 3 \iff v_2(3n + 1) = 1$	Th	8
Th 22	Au moins k pas de croissance $\iff 2^{(k+1)}$ divise $n + 1$; chaînes non bornées, densité $2^{-(k+1)}$	Th	8
P-COL-1	Le gap : la contraction des adresses doit entraîner celle des grandeurs orbite par orbite ; toute preuve doit franchir Th 23	P	8
Th 23	Étrangeté des deux briques : les 54 cases (DR, v_2) sont pleines ; la DR ne porte aucun bit sur v_2	Th	8
Th 23	Fermeture de la route DR : aucun raisonnement cadastral ne peut borner v_2	Th	8
V4.8.5	Le gap de Collatz est la frontière entre les briques 2 et 3	L	8
Th 24	Le +1 rend la moitié amputée : $(3n + 1)/2 = 3n/2 + 1/2$; $3n + c$ contient le monde de $3n + 1$ agrandi c fois ; +1 seul à une maison	Th	9
V4.9.1	Collatz comme loi de chiralité ; chercher le 2, pas le 1	L	9
Th 25	Bilan exact : $2^m = 3^k n \prod (1 + 1/(3n_i))$, $L = k + m + 1$	Th	9
V4.9.2	Le facteur résiduel comme suite des portes ouvertes	L	9
Th 26	La porte 8 : toute orbite hors {1, 2, 4} finit par 16, 8, 4, 2, 1 ; dernier impair $(4^j - 1)/3$	Th	9
V4.9.3	Le 8, porte obligée ; le 1 est le point où le 2 cesse de diviser	L	9
V4.9.4	La racine est le nombre : écriture unique en chiffres 1 à 9, tours gardés	Th	9
V4.9.5	La parité est dans la somme des racines-chiffres	Th	9
V4.9.6	Le duo de racines lit le coup ; seul point aveugle : le centre 5	Th	9
V4.9.7	Le nombre de moitiés entre deux impairs se lit à 6 près	Th	9
V4.9.8	L'axe est une source ; l'arbre inverse sur $6k \pm 1$; $4n + 1$ fait tourner les classes	Th	9
V4.9.9	La frappe fait un demi-tour, la moitié remonte la Genèse ; bilan -0,13 tour	Th, L	9
V4.9.10	La nouveauté libère toujours ; $2^p - 1$ sort sur $3^p - 1$	Th	9
V4.9.11	La seule montée qui se répète vit sous zéro ; -1 seul fixe ; pas de cycle jusqu'à 14 coups	Th	9

identifiant	énoncé	statut	chapitre
V4.9.12	Tout mot fini est réalisé ; la recharge des 1 ne dépend pas du rail	Th, F	9
V4.9.13	Le cas forcé $5n + 1$: cycles 13 et 17 ; $3 < 4 < 5$	Th, F	9
V4.9.14	L'infini est sous zéro ; l'action -1 est réelle, la fiction -1 est la limite d'une action (mélange du fini et de l'infini)	L	9
V4.9.14 bis	Les « -1 » du réel sont des symétries ; un vrai -1 serait un trou qui tire sans semblable ; la physique n'en connaît pas	L, F	9
V4.9.15	Reste : un mot infini qui monte sans se répéter	Chantier	9
L 27	La signature du 7 : 17 termes, passe par 17 ; $L < n$ au-delà de 110	L	9
L 28	Pont Théorème 23 / amorphisme : le gap de Collatz est un coût structurel (réfutable par une formule fermée de $k(n)$)	L	9
Th 29	La rencontre du miroir : hors axe toujours, impairs de l'axe jamais, pairs de l'axe par moitié	Th	10
V4.10.1	Plus petit ajout, division maximale	L	10
Th 37	La corde de Collatz : le 4 du 6, la grille $6k \pm 1$, le rail par la parité de v_2 (rapport 2), la famille $4(9\dots)6 / 6(9\dots)4 = 3(15R) + 1$, $3(21R) + 1$, chiralité, somme $108R + 2$, différence $18R$	Th	10
V4.10.2	La position par le 6, la vitesse par le 4, le côté par la parité du 2	L	10
L 35	La spirale : la racine est l'angle, k la hauteur ; le $+1$ exclut le cercle, pas la montée	L	10
L 35	Aucun cycle de Collatz de moins de 91 segments de montée	F	10
F	(Simons et de Weger 2005, Hercher 2023)		
L 36	46 et 64, les deux mains : chemin lent (23, G) et chemin droit (1, D) ; instanciation biologique	L	10
L 38	Le retour est une donnée, la preuve une invention ; contrepoids Pólya, Littlewood, Mertens	L	10
G.1	Exclusivité cadastrale : le reste de $2n$ par 6 fixe les rails ($G + D$, $D + D$, $G + G$)	Th	11
V4.11.1	Goldbach est trois problèmes, un par combinaison de rails	L	11
G.2	Partition en trois canaux disjoints par classe de reste selon 18	Th	11
G.3	Symétrie d'inversion : pour $2n$ multiple de 18, $DR(p) + DR(q) = 9$	Th	11
V4.11.2	Sous $DR = 9$, Goldbach est une décomposition d'inversion	L	11
G.4	Divergence attendue des canaux (énoncé asymptotique standard, rétrogradé)	L	11
G.5	$DR(n(n + 1)) \in \{2, 3, 6, 9\}$	Th	11
V4.11.3	Le produit consécutif confiné au voisinage de l'axe ; compression 3:1 sur la racine 2	L	11
Th 30	La famille du 3 bloque $1/3$ ou $2/3$; tout p bloque $1/p$ ou $2/p$; rapport exact 2 entre centres multiples de 6 et autres	Th	11
V4.11.4	Le $\frac{1}{2}$ passe par $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$	L	11
Th 31	Le crible est symétrique par $x \leftrightarrow N - x$: un survivant suffit	Th	11

identifiant	énoncé	statut	chapitre
Th 32	Survivants par période $M \Pi(1 - c_p/p) > 0$: aucun train fini ne bloque une période	Th	11
P-GOL-1	Le gap de Goldbach vit entre $\ln N$ et $\sqrt{N}$ (engrenages profonds) ; critère de contrôle sur fenêtre courte	P	11
L 33	La déviation au compte structurel est bornée et décroît (exposant 0,39 vers $\frac{1}{2}$), pas de loi en $1/3$	L	11
L 34	La maison, premier identifiant : Collatz et Goldbach, deux faces du même retour	L	11
Th 39	Amplitude des battements en formule fermée : $Q_G = (2^t \rho + \tau - 2\rho^2)/9$; loi en racine démontrée pour la grandeur quadratique à générateurs fixés	Th	12
V4.12.1	Les deux rails dans τ : rail de 7 pèse $1 - 1/p$, rail de 5 pèse $1 - 3/p$	L	12
Th 40	Produit de cascades : $\sum w_k d_k = \sum w_k c_k + \sum (w_j - 10 w_{j-1}) t_j$; les pointes seules ne composent pas (117 / 198)	Th	12
Th 41	Les quatre moments impairs et pairs restituent exactement les poids des quatre paires (6 561 distributions)	Th	12
Th 41	Moments impairs nuls $\iff$ poids égaux dans chaque paire ; cons. le premier moment seul ne suffit pas	Th	12
V4.13.1	Identité centrale : $s(24) = 36 = 24 + 12$, $\sigma(24) = 60$, $\sigma/n = 5/2$	Th	13
V4.13.2	$\sigma(n) = 5n/2$ n'a que 24 pour solution sous 10^7	Th	13
V4.13.3	Démonstration sans borne : 24 seule solution à au plus deux facteurs premiers	Th	13
V4.13.4	24 plus petit hémiparfait d'abondance $5/2$ et seul sur l'axe (les suivants, 91 963 648 et 10 200 236 032, de racine 1)	Th	13
V4.13.5	Le pliage 12, 24, 36 porte l'axe 3, 6, 9 dans l'ordre	Th	13
V4.13.6	$36 = 6^2$, carré du premier parfait, seul carré triangulaire non trivial sous 1 000	Th	13
V4.13.7	Chaîne aliquote $24 \rightarrow 36 \rightarrow 55 \rightarrow 17 \rightarrow 1$	Th	13
V4.13.8	24 est la première cassure des jumeaux ($25 = 5^2$)	Th	13
V4.13.9	Les cassures 24, 36, 48, 54 s'écrivent d'avance	Th	13
V4.13.10	$35 = 5 \times 7$ devance le centre 36 ; de la première cassure à la première réunion	Th	13
V4.13.11	Deux briques doublées : $4 \times 6 = 24$; chaîne 2, 3 ; 4, 6 ; 24 ; 36 ; 576	Th	13
V4.13.12	$24 = 5^2 - 1$: le tempo est posé par le premier carré de premier	Th	13
V4.13.13	Les carrés de premiers tombent tous sur le rail $\{1, 4, 7\}$	Th	13
V4.13.14	$24 = 4!$, ordre du groupe des permutations des quatre paires	Th	13
V4.13.15	$24 = 2^3 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = (2 + 4)(2 \times 4)/2$; $384 = 360 + 24$	Th	13
V4.13.16	Fibonacci en racine : période 24, pliée $12 + 12$; à 9^k , quatre fois la période du doublement	Th	13
V4.13.17	$1^2 + \dots + 24^2 = 4\,900 = 70^2 = C(8, 4)^2$ (Lucas, Watson)	Th	13

identifiant	énoncé	statut	chapitre
V4.13.1	$24^2 = 576$, pointe pondérée de l'octet, chiffres 5, 7, 6	Th	13
V4.13.1	Les deux marches de l'interface (pas de 11) et leurs miroirs	Th	13
V4.13.2	24 dans la marche : produit des racines qu'il relie ; entrelacement 7, 4	Th	13
V4.13.2	Du demi-remplissage (Cr 24) à la couche pleine (Kr 36)	L	13
V4.13.2	Les trois paires miroirs des exceptions de Madelung s'écrivent avec 4 et 6	Th	13
V4.13.2	Madelung comme jonction de SU(3) et SU(2) doublés	L	13
V4.13.2	Loi des miroirs sur 24/42, 46/64, 29/92 ; $63 + 36 = 99$, $63 - 36 = 27$	Th	13
V4.13.2	Rendement exact de l'outil aveugle : $2280/1751 = 1,302$ paire	Th	13
V4.13.2	Test posé d'avance sur les marches : issue A faible (7/19, 4,1 %), trois échecs nommés	P	13
V4.14.1	Les deux rails sont les deux files de premiers ; 5 et 7 en sont les têtes	Th	14
V4.14.2	Asymétrie des jumeaux : 5 engendre le cercle de six, 7 seulement son rail ; 5^2 tombe sur 7	Th	14
V4.14.3	Restriction cristallographique : rotations d'ordre 1, 2, 3, 4, 6 = diviseurs de $24 \leq 6$	Th	14
V4.14.4	$24 = 4 \times 6$ et $10 = 4 + 6$ (unités des réseaux carré et hexagonal)	Th	14
V4.14.5	Loi d'échelle : à 9^k , période de Fibonacci = $4 \times$ période du doublement	Th	14
V4.14.6	Fermat et Euler : $a^2 + b^2 \Leftrightarrow$ reste 1 par 4 ; $a^2 + 3b^2 \Leftrightarrow$ reste 1 par 3	Th	14
V4.14.7	Quatre classes par 12 ; 5 et 7, premiers à ne choisir qu'un réseau, chacun l'autre	Th	14
V4.14.8	Deux espèces de jumeaux : mixte (5, 7) et pure (11, 1) ; 4 046 et $4\ 122$ sous 10^6	Th	14
V4.14.9	Groupes de rotation des solides 12, 24, 60 = milieu, tempo, $\sigma(24)$	Th	14
V4.14.10	10 divise F_n sous 100 : 1, 5, 12, 24, 25, 36, 48, 60, 72, 96 ; 5 seul premier	Th	14
V4.14.11	Le réseau est le pli de la matière ; le quasi-cristal, ordre que le pli ne sait pas écrire	L	14
V4.14.12	Le 12 voisins commun des empilements compacts se partage en 4 et 6	P	14
V4.15.1	La racine digitale garde la clôture ; c'est $9 \equiv 0$ qui ampute ; la cascade lit la structure interne	L	15
V4.15.2	La cascade est le binôme : pointe = racine de la somme des chiffres pondérée par Pascal	Th	15
V4.15.3	La cascade sépare les permutations de 1681 (8, 8, 3, 7, 7, 3, 2) que la racine confond	Th	15
V4.15.4	Chaque rail pur se projette sur son pivot : $147... \rightarrow 7$, $258... \rightarrow 2$, $369... \rightarrow 6$	Th	15

identifiant	dénoncé	statut	chapitre
V4.15.5	La cascade est aveugle au sens de lecture ($C(n, k) = C(n, n - k)$)	Th	15
V4.15.6	La spirale du soleil $13 + k(k + 1)/2$: empreinte palindrome 4 5 7 1 5 1 7 5 4, somme 39	Th	15
V4.15.7	La pyramide de la spirale, palindromique à chaque étage, passe par 484 et 33, pointe 6	Th	15
V4.15.8	La spirale du soleil comme clé qui se répète à l'infini (position de l'auteur)	L	15
V4.15.9	La cascade de $1 \rightarrow 9$ pointe sur 2 (somme pondérée 1 280)	Th	15
V4.15.10	La cascade de l'octet $1 \rightarrow 8$ pointe sur 9	Th	15
V4.15.11	Les rangées du pavé tordu pointent sur 3, 6, 9 ; le pavé entier, renversé, en colonnes, sur 6	Th	15
V4.15.12	La cascade comme révélateur d'opérateur (ancien Théorème 6 bis.1, rétrogradé)	L	15
V4.15.13	La cascade de $1 \rightarrow 9$ et la découpe $\sqrt{2}$: deux faces d'une même opération	L	15
V4.15.14	Le produit des six voisins d'un coefficient de Pascal est un carré parfait divisible par 9	Th	15
V4.15.15	Caractériser les séquences pour lesquelles la cascade révèle un opérateur	Chantier	15
V4.16.1	Le pendule est l'ombre du cercle : $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ sans infinitésimal (Huygens)	Th	16
V4.16.2	Seule la cycloïde garde l'ombre égale au chemin : isochronisme exact	Th	16
V4.16.3	La première cloche est un compte : ligne 8 de Pascal, fibres de somme 1	Th	16
V4.16.4	La cloche est le cercle vu à travers la somme ; Gauss en a hérité sans le lire	L	16
V4.16.5	Les puissances de 2 tournent sur six positions sans toucher l'axe ; 2^n et 2^{n+3} somment à 9	Th	16
V4.16.6	Le pli est la soustraction comptable appliquée au cercle ; la racine écrit en partie double	L	16
V4.16.7	Le miroir 46 / 64 : racine 1, somme 110, écart 18 ; $694 - 496 = 198$	Th	16
V4.16.8	La pointe de $1 \rightarrow 9$: espérance 5 (1280/256) et racine 2	Th	16
V4.16.9	Le bord de la cascade restitue toute la suite (66 429 séquences)	Th	16
V4.16.10	La cascade de XXXX est $9 - X$	Th	16
V4.16.11	L'octet $1 \rightarrow 8$: somme pondérée $576 = 24^2$, pointe 9	Th	16
V4.16.12	Pascal sous 3 : nombre de coefficients non multiples de 3 = produit des (chiffre + 1) en base 3	Th	16
V4.16.13	Ligne 3^k sous 9 : quatre coefficients seulement (positions 0, $3^{(k-1)}$, $2 \cdot 3^{(k-1)}$, 3^k)	Th	16
V4.17.1	Cinquante-quatre nombres de Kaprekar jusqu'à un million	Th	17
K.1	Tout nombre de Kaprekar a pour racine 9 ou 1	Th	17

identifiant	énoncé	statut	chapitre
V4.17.2	Les deux adresses de la mémoire : le réseau et le réseau plus le pas	L	17
K.2	Le complément $10^e - n$ d'un nombre de Kaprekar l'est aussi, avec la même queue (25, 209, 1729, 1984, 2500, 122449)	Th	17
V4.17.3	Les queues 1729 et 209 relient les volets du triptyque	L	17
V4.17.4	Factorisations des purs-neufs ; $999\ 999 = 7 \times 142\ 857$	Th	17
V4.17.5	La mémoire engendre les mémorieux	L	17
V4.17.6	$142\ 857^2 = 20\ 408\ 122\ 449$ et $20\ 408 + 122\ 449 = 142\ 857$	Th	17
V4.17.7	Le cycle est une mémoire en mouvement	L	17
V4.17.8	$T(9...9)$ et $T(10^k)$ sont de Kaprekar à toute profondeur	Th	17
V4.17.9	Le triptyque : clôture, circulation, souvenir	L	17
V4.18.1	Loi des miroirs : $r(n) - n = 9(b - a)$, $n + r(n) = 11(a + b)$; paliers 101, 1 001 ; largeur paire divisible par 11	Th	18
V4.18.2	La soustraction moteur de la mémoire, l'addition moteur de l'interface	L	18
V4.18.3	$DR(n + r(n)) = DR(2n)$: la racine d'une trajectoire de Lychrel double à chaque pas	Th	18
V4.18.4	Clôture (Kaprekar) et circulation (Lychrel)	L	18
V4.18.5	Treize candidats de Lychrel sous 1 000, 249 sous 10 000	Th	18
V4.18.6	Les cinq premiers fugitifs, espacés de 99, fusionnent en 887	Th	18
V4.18.7	Les racines des treize fugitifs sont dans $\{5, 6, 7\}$	Th	18
V4.18.8	Une addition sans retenue donne un palindrome	Th	18
V4.18.9	196 ne connaît aucun pas sans retenue sur soixante pas	Th	18
V4.18.10	La retenue perpétuelle comme mécanisme de la fuite	L	18
V4.18.11	$196 = 2^2 \times 7^2 = 4 \times 49$; $4 \times 49,5 = 198$; $10 \times 49,5 = 495$; $198 - 196 = 2$	Th	18
V4.18.12	196, le nombre qui n'a pas reçu le demi	L	18
V4.18.13	Le dipôle Kaprekar / Lychrel	L	18
V4.19.1	Constantes du miroir : $n - \tilde{n} = 9(a - b)$, $n + \tilde{n} = 11(a + b)$, à trois chiffres $99(a - c)$	Th	19
V4.19.2	$198 = 2 \times 9 \times 11$ (identité)	Th	19
V4.19.3	198, relation $\times$ soustraction $\times$ addition ; $198 = 99 + 99$	L	19
V4.19.4	Le pavé trié 231/564/897 : produits de colonnes 28, 80, 162, racines 1, 8, 9	Th	19
V4.19.5	9-8-1 et $g = 9,81\text{ m/s}^2$ (correspondance)	L	19
V4.19.6	Espacement 33 du pavé trié ; $33^2 = 1\ 089 = 198 + 891$; $9\ 801 = 99^2$	Th	19
V4.19.7	Généalogie $2, 3 \rightarrow 4, 6 \rightarrow 46/64 \rightarrow 496/694 \rightarrow 198$	Th	19
V4.19.8	496 et la théorie des cordes : jamais calculé $694 - 496$	L	19
V4.19.9	Paires miroirs internes de 198 : $19 \times 91 = 1\ 729$, $18 \times 81 = 1\ 458$, $98 \times 89 = 8\ 722$; différences de racine 9	Th	19
V4.19.10	1 729 comme pivot volumétrique	L	19
V4.19.11	$198 + 891 = 1\ 089 = 33^2$; $891 - 198 = 693 = 7 \times 9 \times 11$	Th	19
V4.19.12	Carrés de premiers sur $\{1, 4, 7\}$, produit 28	Th	19

identifiant	énoncé	statut	chapitre
V4.19.13	La descente Ni-Co-Fe (28, 27, 26) épelle le gradient ; somme 81	L	19
V4.19.14	Cube 6/8/12 (26), prisme hexagonal 8/12/18 (38), Euler 2	Th	19
V4.19.15	Racines des cubes {1, 8, 9}, des carrés {1, 4, 7, 9}	Th	19
V4.19.16	Descente au pas de 101 de 945 à 036 : cadastre complet ; 137, 33e premier	Th	19
V4.19.17	137 et la constante de structure fine (correspondance déclarée)	L	19
V4.19.18	$361 = 360 + 1 = 19^2$; L : la spirale brise le cercle	Th	19
V4.19.19	$46/64 \rightarrow 496/694$ par insertion du 9 ; racine 1 conservée	Th	19
V4.19.20	Différences croisées 450, 432, 630, 648 de racine 9 ; somme $2\ 160 = 6^3 \times 10$	Th	19
V4.19.21	$46 + 64 + 27 = 137$ (L : chromosomes, codons, cobalt)	Th	19
V4.19.22	$263 + 137 = 300$, $163 - 137 = 26$ (L sur valeur arrondie de c)	Th	19
V4.19.23	Aucune supercorde sans anomalie de dimension de jauge autre que 496	P	19
V4.19.24	Les différences croisées $a9b - ab$, $a9b - ba$ sont multiples de 9 (ancienne prédiction reclassée)	Th	19
V4.19.25	Isotopes stables groupés sur $DR(A) \in \{2, 4, 9\}$ (incomplète : plancher et fenêtre à fixer)	P	19
V4.19.26	Racine $DR(Z) = 5$ moins hexagonale (44 % contre 64 %), reçu à refaire	P	19
V4.19.27	Le cube écrase chaque rail : racines 1, 8, 9 ; sommes de deux cubes sur 1, 2, 7, 8, 9	Th, L	19
V4.19.28	Nombres de Fermat : racines 5 et 8 en alternance ; produit $F(m) - 2$ sur 3 et 6	Th, L	19
V4.19.29	Mersenne $M(p)$, $p > 3$ premier : racine 1 si $p = 6k + 1$, 4 si $p = 6k - 1$; 7 seulement pour $M(3)$	Th, L	19
V4.19.30	Fibonacci : $F(n) + F(n + 12) = 18 F(n + 6)$; racines inverses à douze pas	Th, L	19
V4.19.31	$1 + \dots + 31 = 496$; $K(496) = K(495) = 495 = 2 + \dots + 31$	Th, L	19
CP	Bijection des deux coordonnées : $n = 9k + DR(n)$, $k = \lfloor (n - 1)/9 \rfloor$	Th	20
2.1			
CP	La convention $9 \equiv 0$ jette le circonscrit et mutile l'inscrit	Th	20
2.2			
CP	$DR \circ DR = DR$	Th	20
2.3			
CP	Décompression en deux pas : $10^3 - 1$, $10^{100} - 1$, $10^{1000} - 1$	Th	20
2.4			
CP	La rétro-projection interne, régime hors-vitesse de la racine	L	20
2.5			
CP	Le fond (le regard intérieur termine) et le sans-plafond (k non borné)	Th	20
3.1			
CP	Les deux faces de la saudade comme postures exactes	L	20
3.2			

identifiant	énoncé	statut	chapitre
CP	Une clôture paire a un centre occupé ; la clôture 9 a un	Th	20
4.1	centre vide		
CP	Les huit chiffres somment à 36, $36/8 = 4,5$, aucun ne l'égale	Th	20
4.2			
CP	Un centre inatteignable est un attracteur vivant	L	20
4.3			
CP	L'inversion du cercle est une involution qui échange centre	Th	20
5.1	et infini		
CP	La cinquième paire : $(4,5 ; \infty)$	L	20
5.2			
CP	Borne d'information : l'extérieur infini en bijection avec	Th	20
5.3	l'intérieur fini		
CP	Annexion à taux plein : $R \rightarrow R\sqrt{2}$ double l'aire	Th	20
6.1			
CP	Le coin du carré est sur la diagonale, qui passe par le centre	Th	20
6.2			
CP	L'expansion comme ingestion	L	20
6.3			
CP	Deux niveaux de points fixes : aucun sur les chiffres, la table	Th	20
7.1	$\times 9$ sur les tables		
CP	Les tables des rails somment à 99 999 999 ; l'axe déborde	Th	20
7.2	(100 900 899)		
CP	$99\,999\,999 = 3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137$	Th	20
7.3			
CP	$DR(9k) = 9 ; 9 + 1 = 10 \rightarrow 1$	Th	20
7.4			
CP	La table $\times 9$, membrane de la cinquième paire	L	20
7.5			
CP 8	Le tableau des inversions et les trois alignements (9, 10, 11)	Th	20
CP	Toute position est médiatrice	L	20
9.1			
CP	Le pli à chaque étage	L	20
9.2			
CP	Le moteur cosmologique : l'expansion poursuit le centre	L	20
9.3			
V4.20.1	L'espace ingère, le temps archive : jonction avec La Loi de la Sédimentation	L	20
V4.21.1	L'amputation primordiale à six ans : $1 + 1 = 2$ présuppose la séparation	L	21
V4.21.2	La soustraction révèle, elle n'anéantit pas (lois de conservation)	L	21
V4.21.3	L'inverse diabolisé	L	21
V4.21.4	L'horloge à neuf positions ; le zéro, mémoire d'un cycle accompli	L	21
V4.21.5	Pourquoi neuf : base d'écriture et structure fermée ; bases 12, 16, 60	L	21

identifiant	énoncé	statut	chapitre
V4.21.6	Les quatre paires, sommes 9, différences 7, 5, 3, 1 (fonctions : L)	Th	21
V4.21.7	Le barycentre, miroir de lui-même	L	21
V4.21.8	Axiome A0 : la racine comme position dans le cycle des neuf, trois preuves d'invariance	Th	21
V4.21.9	Le rail D est le sous-groupe d'ordre 3 des positions inversibles	Th	21
V4.21.10	$G = 2D$; $G \times G = D$, $D \times D = D$, $D \times G = G$	Th	21
V4.21.11	L'axe est l'idéal engendré par 3	Th	21
V4.21.12	Les carrés de premiers sur D, six cas	Th	21
V4.21.13	La table par neuf écrit les quatre paires puis les retourne	Th	21
V4.21.14	La table de multiplication en racines : lignes a et $9 - a$ inverses et renversées	Th	21
V4.21.15	Les chemins du $\frac{1}{2}$: six exacts, le cinquième retiré	Th	21
V4.21.16	Le $\frac{1}{2}$ du spin, de la droite critique, du triangle équilatéral	L	21
V4.21.17	$4,5 \times$ écarts doublés : 9, 27, 45, 63 (raison 18)	Th	21
V4.21.18	Les rails comme cycles dynamiques autour de leurs centres 4, 5, 6 (lectures biologiques : L)	Th	21
V4.21.19	$234 + 432 = 666$; $567 + 765 = 1\ 332$; $891 + 198 = 1\ 089 = 33^2$	Th	21
V4.21.20	Les extrêmes des lignes du pavé révèlent le rail D ; $6k + 1$ sur 1, 7, 4	Th	21
V4.21.21	Le triplet 578 manque aux multiples de 123 ; $5 \times 7 \times 8 = 280$, $5 + 7 + 8 = 20$	Th	21
V4.21.22	Quatre triplets, quatre dimensions : espace, mémoire, régulation, mouvement-continuité	L	21
V4.21.23	La cascade des quinze ruptures (résumé ; Volume 6)	L	21

Décompte. 285 énoncés numérotés : 181 Th, 91 L, 9 P, 3 Chantier, 1 F identifié (les faits de la science reçue cités dans le texte sous la marque F ne sont pas numérotés, sauf celui-ci, qui porte une conclusion du dossier Collatz). Les Théorèmes 19 et 20 du Tome II sont réservés sans contenu (Annexe B).

Chapitre 22. La congruence des paires : le mod qui garde les inverses (pièce entrée mot pour mot). Les statuts sont ceux que la pièce porte elle-même, section par section ; aucun énoncé n'a été renuméroté.

Annexe B. Retraits et corrections

Règle suivie : aucune ligne retirée sans une ligne proposée (règle du 18 septembre 2026) ; tout retrait est conservé avec sa date et son remplacement (règle R9). Les retraits datés par les sources elles-mêmes viennent d'abord ; viennent ensuite les rétrogradations et corrections faites pour ce volume, avec leur raison.

B.1 Retraits datés par les sources

1. **La couche quantitative selon 36** (Collatz v2.1, mars 2026, « Théorème 8 », noté C.8 ; repris au § II.3 de la version 0.1 du Tome II). *Retiré le 8 juillet 2026* (Tome II, v0.2) : la table des valuations fixes des 18 classes impaires (valuations 2, 4, 2, 3, 2, 6, 2, 3, 2 pour les classes de contraction, valeur centrale 2,889), la chaîne de croissance maximale de 3 pas ($15 \rightarrow 23 \rightarrow 35 \rightarrow 17$), la chaîne à deux états (6/9, 3/9, 5/9, 4/9) et sa distribution stationnaire 5/8 contre 3/8, le facteur de contraction 0,662 par pas impair (et les valeurs dérivées $0,816, 3,375 \times 0,75 = 2,531, 1,261$), le renommage du gap en « temps de mélange d'une chaîne finie » et la phrase « réduit la conjecture de Collatz à une question ergodique finie ». *Raison* : faute de bonne définition (calcul sur le plus petit représentant de chaque classe), réfutée par les sentinelles 37 ($v_2(4) = 2, v_2(112) = 4$) et 31 (quatre pas de croissance). *Remplacement* : Théorèmes 21, 22 et 23, et P-COL-1 (chapitre 8).
2. **Collatz v2.1, § 7.1** (« $3^k \neq 2^m$ exclut les cycles »). *Retiré le 27 septembre 2026* (Tome II, v0.3). *Remplacement* : un cycle exige $2^m = 3^k \prod (1 + 1/(3n_i))$ exactement (Th 25) ; l'exclusion des cycles reste ouverte.
3. **Collatz v2.1, § 7.3** (épuisement de l'information de racine en un nombre de frappes de l'ordre de $\log n$; constante empirique $6,95 \log_2 n$). *Retiré le 27 septembre 2026*. *Raison* : le Théorème 23 établit que la racine ne compte pas les bits. *Remplacement* : $L = k + m + 1$ et $L < n$ au-delà de 110.
4. **Collatz v2.1, § 7.2 et § 8** (renvoi au théorème selon 36). *Remplacés le 27 septembre 2026* par le renvoi au Théorème 21 et à P-COL-1. Avec eux tombent les affirmations « la convergence est structurellement inévitable » (§ 1.2) et « la contraction est structurelle, la croissance transitoire » (§ 15) comme énoncés démontrés ; les phrases de conclusion de l'auteur sont gardées comme citations (chapitre 8, section 8.7), leur contenu étant P-COL-1. Le critère F5 de la v2.1 est atteint et caduc.
5. **Tome I, § IX.3** : une déclaration antérieure du corpus, qui tenait pour acquis le passage de la disjonction des rails à l'indépendance des criblages des deux branches, *est retirée par le Tome I lui-même* (juillet 2026) et remplacée par l'état

exact : lemme de non-saturation nommé, de même difficulté que la conjecture (V4.5.2).

6. **Goldbach v1.0, § 6.2 et § 6.3** (indépendance des trois canaux, borne par le produit des probabilités, « triple redondance » rendant l'échec « structurellement impossible »). *Retirés le 27 septembre 2026* (Goldbach v1.1). *Raison* : les trois canaux sont des sous-populations disjointes d'un même ensemble ; « les trois vides » est exactement « aucun couple ». *Remplacement* : redondance structurelle, Théorèmes 31 et 32 ; plus aucun vocabulaire probabiliste. Le § 8 de la v1.0 (« la structure selon 36 qui résout Collatz ») tombe avec le retrait n° 1.
7. **Le rapport 8/5** (notes de travail du corpus et Tome I, § XIII.b : « ratio prédit $8/5 = 1,600$, mesuré $1,638$ avant convergence » pour la structure des centres multiples de 6). *Retiré le 27 septembre 2026* (Goldbach v1.1). *Remplacement* : rapport 2, démontré (Th 30 c), mesuré $1,991$ vers 10^3 , $1,996$ vers 10^5 , $1,999$ autour de 3×10^5 , $2,003$ vers 4×10^5 . *Conséquence pour le Tome I* : l'exemple inaugural du test de la queue de Stevin (V4.7.5), dont la fonte $1,5974 \rightarrow 1,5998$ était présentée comme convergence vers $8/5$ pour cette structure, est retiré comme preuve de ce rapport ; le protocole est conservé. *Remarque de vérification* : $8/5 = (4/3)(6/5)$ est le rapport attendu entre centres multiples de 35 et centres premiers à 35 (mesuré $1,60$ pour ce volume entre $200\ 000$ et $216\ 000$, hors multiples de 3) ; la source ne permet pas de dire si la mesure du Tome I portait sur ces bandes.
8. **Errata lexicaux de la version 0.4 du Tome II** (7 octobre 2026, Tome II v0.5) : dans deux phrases (« le carré jette le signe et ... jette le rang », « ... écrase la spirale en cercle »), le mot qui désignait la réduction des restes est remplacé par « le pli » ; dans le Théorème 37 (e), la qualification des deux rails par leur contraire est remplacée par « retombent chacun sur l'autre rail ». Appliqués.
9. **Le Nombre Plus que Parfait** : la version 0.3 écrivait $78\ 498$ premiers jusqu'à un million (tous les premiers, 2 et 3 compris, pour lesquels la propriété ne vaut pas) ; *corrigé le 7 octobre 2026* en $78\ 496$ (refait pour ce volume : $78\ 496$). La version 0.2 écrivait « $s(24)/24 = 60/24 = 5/2$ » : 60 est $\sigma(24)$ et $s(24) = 36$; lettre corrigée, propriété inchangée.

B.2 Rétrogradations faites pour ce volume

10. **C.6, l'unicité du canal de la racine digitale** (Collatz v2.1, « Théorème 6 ») : rétrogradée en Lecture. Les propriétés (a) à (d) sont des théorèmes ; l'unicité n'est établie que par comparaison avec deux autres canaux (factorisation, binaire), sans définition générale de « canal ».
11. **G.4, la divergence des canaux** (Goldbach v1.0, « Théorème 4 ») : rétrogradée en Lecture. Il s'agit d'un compte *attendu* (heuristique de Hardy et Littlewood découpée par canal), non d'un compte démontré ; la v1.1 le garde elle-même comme « énoncé asymptotique standard ».
12. **Le « Théorème 6 bis.1 » de La Cascade cadastrale v4.1** (la cascade comme révélateur d'opérateur pour toute « séquence cadastralement significative ») : rétrogradé en Lecture (V4.15.12). L'hypothèse porte sur une classe que la source déclare elle-même non formalisée ; les pointes individuelles restent des théorèmes ; la formalisation est le Chantier V4.15.15.

13. **Le chemin 5 des « sept chemins » du $\frac{1}{2}$** (Livre II, II.4.2 : centres des rails 4, 5, 6) : retiré ; 5/9 n'est pas $\frac{1}{2}$, ce que la source reconnaît. Les chemins 3 et 4 sont notés comme variantes du chemin 2 et du chemin 1 (V4.21.15).
14. **La prédiction (ii) du Pont fractal** (« les différences croisées auront toujours la racine 9 ») : reclassée Théorème (V4.19.24), parce qu'elle ne peut pas échouer ($a9b - ab = 90(a + 1)$, $a9b - ba = 99a - 9b + 90$) ; règle R10.
15. **Les prédictions (iii) et (iv) du Pont fractal** : gardées comme P, marquées incomplètes (plancher de l'outil aveugle et fenêtre non fixés ; reçu de la (iv) non reproduit), règle R11.

B.3 Corrections de fait et de formulation

16. **Th 22** : la source écrit « Une orbite effectue k pas de croissance consécutifs depuis n si et seulement si $n \equiv 2^{(k+1)} - 1 \pmod{2^{(k+1)}}$ » ; la caractérisation exacte est « au moins k pas » (pour exactement k , il faut en outre que la couche $k + 2$ ne soit pas un 1). Vérifié pour $k = 1$ à 10.
17. **Th 16** : le produit des quatre roues annoncé, 88 913 825, vaut $1\,616\,615 \times 55$; $55 = 5 \times 11$ n'est pas étranger aux trois premières roues (35, 143, 323). Le quatrième module n'est pas identifiable à partir de la source ; la conclusion (zéro alignement à quatre roues pour $X = 2 \times 10^5$) ne dépend pas de cette valeur, tout quatrième joint étranger portant le produit au-delà de 10^9 .
18. **Lecture 38, le contrepoids** : « $\pi(x)$ dépasse $\text{Li}(x)$ au-delà de 10^{316} » est précisé : J. E. Littlewood (1914) a démontré que $\pi(x) - \text{Li}(x)$ change de signe une infinité de fois ; le premier changement se situe en deçà d'environ $1,4 \times 10^{316}$ selon les bornes actuelles. « La conjecture de Mertens est fausse au-delà de 10^{16} » est précisé : elle a été réfutée par A. Odlyzko et H. te Riele (1985), sans contre-exemple explicite connu, et elle est vérifiée jusqu'à 10^{16} au moins.
19. **La Cascade cadastrale v4.1, § 5** : « une suite symétrique pointera vers le 6, le régulateur » est retiré ; c'est faux en général (la suite 1 1 pointe sur 2 ; vérifié).
20. **L'Illusion des mathématiques récréatives, § 14** : l'affirmation que la densité des correspondances avec des constantes physiques « dépasse ce qu'on attendrait » est retirée faute du compte de l'outil aveugle qui la fonderait (voir la méthode du chapitre 13, section 13.8). La phrase du § 2.4 sur une base B quelconque (« $B^2 - B - (B - 1) = 2(B^2 - 1)/\dots$ »), tronquée dans la source, n'est pas reprise.
21. **L'Illusion des mathématiques récréatives, § 3.2** : ce que l'article nomme « pavé tordu » (231 / 564 / 897, rangé par familles) n'est pas le pavé tordu du Tome I (234 / 567 / 891) ; il est nommé ici « pavé trié » pour éviter la confusion.
22. **L'anecdote du taxi de Hardy et Ramanujan** : datée de 1917 par *L'Illusion des mathématiques récréatives* et de 1919 par *Les Nombres qui se Souviennent* ; rapportée ici comme une visite de Hardy à Ramanujan malade, vers 1918.
23. **Le Pont fractal, § 6** : « le cobalt est le seul élément requis par la vie qui siège dans la triade ferromagnétique » est inexact (le fer est indispensable : hémoglobine, cytochromes ; le nickel l'est pour de nombreux organismes : uréase). *Ligne proposée* : le cobalt est le seul des trois au cœur d'une vitamine (B12). « Le fer, noyau le plus fortement lié » est précisé : le nickel 62 a la plus grande énergie de liaison par nucléon, le fer 56 la plus petite masse par nucléon.

- « $163 + 137 = 300$, la vitesse de la lumière en milliers de km/s » porte sur une valeur arrondie (299 792,458 km/s) : Lecture.
24. **Le Pont fractal, prédiction (i)** : le fait reçu est ajouté (A. Adams, O. DeWolfe et W. Taylor, 2010, ont écarté comme incohérents les candidats formels $U(1)^{496}$ et $E_8 \times U(1)^{248}$).
 25. **Livre II de la Bible Quantique, II.1.4** : « toute civilisation à numération positionnelle a abouti à neuf chiffres natifs, sans exception documentée » est faux (Babylone, base 60 ; Maya, base 20 ; Égypte, non positionnelle). *Ligne proposée* : la lignée indienne et arabe, et les baguettes chinoises, écrivent neuf chiffres et un vide (V4.21.4).
 26. **Livre II, II.1.5** : la « réponse arithmétique » (9 seul entier sous 100 à être un carré d'un seul premier, aux diviseurs propres 1 et 3) ne discrimine pas (25 et 49 partagent les deux premières propriétés ; la troisième est la définition de 9). *Remplacement* : le théorème de singularité (V4.2.10). La lecture « $60 = 4 \times 15$, quatre paires $\times$ somme des positions de l'axe » est corrigée : la somme de l'axe vaut 18.
 27. **Livre II, II.2.3** : « le 6, position centrale, milieu géométrique des neuf positions » est corrigé : le milieu des neuf positions est 5, le centre de l'involution 4,5.
 28. **Livre II, II.3.3** : la phrase attribuée à Nikola Tesla sur 3, 6 et 9 n'a pas de source primaire connue ; gardée comme citation attribuée, sans valeur de reçu. La référence à J.-P. Serre (II.2bis) n'est pas reprise, faute de rapport établi avec le propos.
 29. **Livre II, II.4bis** : « La valeur 31,5 ans constitue la durée moyenne d'un cycle solaire double (cycle de Hale [...]) » est retiré ; le cycle de Hale dure environ 22 ans.
 30. **Livre II, II.8** : « le gradient 198 est un postulat intrinsèque du cadastre » se lit « une identité interne du cadastre » ($198 = 2 \times 9 \times 11$ se démontre).
 31. **Livre II, II.10** : « 28, durée du cycle lunaire moyen » est corrigé (mois synodique 29,53 jours, mois sidéral 27,32) ; le cycle menstruel est usuellement compté sur 28 jours.
 32. **Tome I, § II, la paire d'inversions** : « chaque chaîne est une permutation de $\{1...8\}$: les deux rails complets, D et G » est précisé : $\{1, ..., 8\}$ contient les deux rails et les positions 3 et 6 de l'axe ; le 9 seul est absent.
 33. **La Cinquième Paire, Th 4.2** : énoncé en langage de probabilité (« espérance 4,5, probabilité nulle d'égaliser 4,5 ») ; récrit en compte exact (somme 36, $36/8 = 4,5$).
 34. **La Cascade et la Cloche, § 2** : la période du pendule est écrite $T = 2\pi\sqrt{L/g}$; la pièce l'écrit $(44/7)\sqrt{L/g}$, avec π écrit 22/7, convention du corpus (Volume 2), ce qui est signalé dans le texte.
 35. **Le balayage de l'unicité de 24** ($\sigma(n) = 5n/2$ sous 10^7) n'est refait pour ce volume que jusqu'à 10^6 ; la valeur 10^7 est celle du crible de la pièce.
 36. **Lecture 33** : les écarts-types de l'exécution de contrôle du dossier (0,0387, 0,0148, 0,0115) diffèrent légèrement de ceux du texte (0,0366, 0,0158, ...) ; les fenêtres diffèrent (500 centres pairs contre mille centres) ; la décroissance est la même.

B.4 Numérotation et forme

- 37. **Théorèmes 19 et 20 du Tome II** : déclarés inchangés par l'erratum de la version 0.2, mais absents de toutes les sources de ce volume (la version 0.1 n'y figure pas). Leurs numéros sont réservés, sans contenu versé.
- 38. **Numérotations locales** : les théorèmes de Collatz v2.1 (1 à 8) sont notés C.1 à C.8 ; ceux de Goldbach v1.0 (1 à 5), G.1 à G.5 ; le « Lemme 3 » et le « Théorème 1 » des *Nombres qui se Souviennent*, K.1 et K.2 ; le « Lemme 2 » de *L'Énigme 196*, V4.18.8. Correspondances : C.1 + C.3 = Th 17 ; C.2 + C.5 = Th 18 ; C.7 = Th 14.
- 39. **Typographie des citations** : les citations de l'auteur qui comportaient un tiret d'incise sont données avec deux-points, virgules ou parenthèses, sans autre changement. Les mots retirés du vocabulaire du corpus (le terme désignant la réduction des restes, le qualificatif des rails contraires) sont remplacés dans le texte courant et dans les paraphrases ; à l'intérieur des guillemets, le texte exact de la source est gardé, puisque les citations sont exemptées de cette règle (correction du 15 octobre 2026) : sous-titre de *La Cascade cadastrale*, « ce que seul le modulo ampute » ; Théorème 22 du Tome II (point 16) ; Livre II, II.4bis (point 29).
- 40. **Récits de circonstances** : les passages des sources qui racontaient la genèse d'un résultat (circonstances de travail, consultations, versions intermédiaires, scripts d'audit nommés) sont retirés ; seules les dates des énoncés restent.

B.5 Formulations corrigées des relectures du 15 octobre 2026

- 41. **Somme des carrés de Fibonacci à six pas**. La formulation première disait que $F(n)^2 + F(n + 6)^2$ a toujours la racine 9, et que les racines des carrés de Fibonacci forment les quatre paires de l'involution. Faux : la somme alterne entre les racines 8 et 1 ($1^2 + 13^2 = 170$, racine 8) ; les carrés n'ont que les racines 1, 4, 7, 9. *Remplacement* : le pli à douze pas, $F(n) + F(n + 12) = 18 F(n + 6)$ (V4.19.30).
- 42. **Sommes de deux cubes**. La formulation première limitait les racines à « trois positions », listées {1, 2, 8, 9}. Faux : il y en a cinq, 1, 2, 7, 8 et 9 ; contre-exemple $149\,389 = 8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3$, racine 7. *Remplacement* : V4.19.27.
- 43. **Kaprekar sur deux consécutifs**. La formulation première disait 495 et 496 seuls entiers consécutifs à trois chiffres de même premier pas de Kaprekar. Faux : 211 couples le sont (485 et 486 donnent tous deux 396), dès que n et $n + 1$ gardent les mêmes chiffres extrêmes. *Remplacement* : V4.19.31, sans clause d'unicité.
- 44. **Attributions**. L'identité du produit des nombres de Fermat, $F(0) \times \dots \times F(m - 1) = F(m) - 2$, est élémentaire et connue dès 1730 ; elle n'est pas due à Pépin, dont le nom se rattache à un test de primalité (1877).
- 45. **Arbre inverse de Collatz, formulation première (15 octobre 2026)**. « $n(j+3)$ a la même racine que $n(j)$ » : faux, trois pas de $4x + 1$ donnent $64x + 21$, soit $x + 3$ dans la division par 9 ; la classe revient en trois pas, la position en neuf. « Un exposant multiple de 6 conserve la racine » : faux (46 cas sur 420). *Remplacement* : V4.9.8.
- 46. **Sortie des nombres de Mersenne, formulation première**. La racine 8 de 3^p

– 1 était rattachée à « la porte 8 du Théorème 26 » ; la porte 8 du Théorème 26 est l'entier 8 du défilé final, non une racine. Le rapprochement avec le théorème de Mihăilescu ($243 - 242 = 1$) est une Lecture : 2×11^2 n'est pas une puissance pure. *Remplacement* : V4.9.10.

47. **Racines du rail D selon a (G.2).** La version précédente donnait pour un premier $6a + 1$ la racine 7, 4, 1 selon que a a la place 0, 1, 2 dans les tours de 3 ; les valeurs exactes sont 1, 7, 4 ($7 = 6 \times 1 + 1$ a la racine 7, avec $a = 1$). Les valeurs du rail G (8, 5, 2) étaient justes ; la table des canaux n'en dépendait pas. L'erreur est apparue en réécrivant l'énoncé avec ses tours.
48. **Notation de congruence retirée (16 octobre 2026).** Les énoncés Th 8 complément, Th 13, Th 21, Th 22, V4.10 (a), G.1 et G.2 sont réécrits avec leurs tours ($a = b + m \cdot t$) ; aucun énoncé ne change. La règle des miroirs, écrite ainsi, devient exacte et plus forte : $r_S(+1) + r_S(-1) = M_S$, et non seulement un multiple de M_S . Voir le dossier du corpus sur la réduction au reste (16 octobre 2026).

Annexe C. Sources fusionnées

Les vingt-deux fichiers suivants, tous lus en entier, ont été fusionnés dans ce volume (répertoire des sources du corpus, en texte).

1. **Bastos_2026_Theorie_des_Nombres_ARC_Tome_I7.txt.** *Les Nombres Premiers n'ont jamais été cachés. Corruption, amputation, restauration*, Théorie des Nombres ARC, Tome I (juillet 2026). Apport : la feuille 1 à 30, les trois strates, le cadastre et ses tables, le pavé tordu, la paire d'inversions, l'invariance de base et la singularité de 9, les Théorèmes 1 à 16, le prédicat $J(k)$, la dynamique des ondes et le chantier n°3, la critique riemannienne, le principe d'incarnation, le test de la queue de Stevin, la synthèse et la table de défense (chapitres 1 à 7).
2. **Les_Nombres_Premiers_nont_jamais_ete_caches_v2.txt.** Le même Tome I en version balisée ; comparé mot à mot au précédent : identique, aucun apport distinct.
3. **Bastos_2026_Grid_Revisited_Digital_Root_Partition.txt.** *The $6k \pm 1$ Grid Revisited via Digital-Root Partition* (juillet 2026, anglais, traduit). Apport : les vérifications étendues (3×10^7 , 152 890 paires jumelles sous 5×10^6 , indexation jusqu'à 10^6), l'extension de Th 10 aux delphes ($1/49$, $1/529$), la liste des apports revendiqués, la formule « nous revendiquons la réduction et le prédicat exact, non le lemme » (chapitres 1, 3, 5, 7).
4. **Bastos_2026_La_Planche_ARC.txt.** *La Planche ARC, manifeste pédagogique* (juillet 2026). Apport : la disposition en six panneaux, les indices k des carrés (4, 8, 20, 28), les phrases de la planche (chapitres 1, 2, 4).
5. **Bastos_2026_Theorie_des_Nombres_ARC_Tome_II_v0_2_Erratum_Collatz.txt.** *Les Nombres en Mouvement*, Tome II, version 0.2 (8 juillet 2026). Apport : l'erratum de la couche selon 36, les sentinelles 37 et 31, les Théorèmes 17, 18, 21, 22, 23 et son corollaire, P-COL-1, la dédicace des sentinelles (chapitre 8).
6. **Bastos_2026_Tome_II_v0_4_source.txt.** Tome II, versions 0.3 et 0.4 (27 septembre 2026). Apport : les Théorèmes 24, 25, 26, 29, 37, les Lectures 27, 28, 35, 36, 38, les corrections à Collatz v2.1, les annexes de vérification (chapitres 9 et 10).
7. **Bastos_2026_Tome_II_v0_5_ajouts_source.txt.** Tome II, ajouts de la version 0.5 (7 octobre 2026). Apport : les Théorèmes 39, 40, 41, la lecture des rails dans τ , les errata lexicaux (chapitre 12).
8. **Collatz_Conjecture_v2_1.txt.** *The Collatz Conjecture as Irreversible Sedimentation in the Inversion Topology*, version 2.1 (mars 2026, anglais, traduit). Apport : la dédicace, l'état de la question, les théorèmes C.1 à C.7, la lecture compression-permutation, les critères F1 à F5, les phrases de conclusion ; le théorème C.8 et

les § 7, 8, 12 retirés (chapitre 8, Annexe B).

9. **Goldbach_Conjecture_Cadastral_Triple_Channel_v1.txt.** *The Goldbach Conjecture as Cadastral Partition*, version 1.0 (mars 2026, anglais, traduit). Apport : la dédicace, l'état de la question, G.1 à G.5 et leurs tables, les exemples, les critères F1 à F5 ; § 6.2 et 6.3 retirés (chapitre 11).
10. **Goldbach_Cadastral_v1_1_source.txt.** Dossier Goldbach, version 1.1 (27 septembre 2026). Apport : les Théorèmes 30, 31, 32, P-GOL-1, les Lectures 33 et 34, le retrait du 8/5 et de l'indépendance, la dédicace (chapitre 11).
11. **Le_Nombre_Plus_que_Parfait_v0_7_source.txt.** *Le Nombre Plus que Parfait. 24, son milieu, son miroir et sa couche*, pièce 9, version 0.7 (7 octobre 2026). Apport : tout le chapitre 13.
12. **Les_Jumeaux_et_les_Deux_Reseaux_v0_2_source.txt.** *Les Jumeaux et les Deux Réseaux*, pièce 10, version 0.2 (7 octobre 2026). Apport : tout le chapitre 14.
13. **La_Cascade_et_la_Cloche_v0_2_source.txt.** *La Cascade et la Cloche. Huygens, le cercle de six, et la cloche gardée comme compte* (5 octobre 2026, version 0.2 du 7 octobre). Apport : tout le chapitre 16.
14. **Bastos_Cascade_Cadastrale_v4_1.txt.** *La Cascade cadastrale*, version 4.1 (mai 2026). Apport : la cascade, ses propriétés, la spirale du soleil, la révélation de l'opérateur, l'ancrage, le produit hexagonal, les questions ouvertes (chapitre 15).
15. **la_cascade_cadastrale_v4.txt.** *La Cascade cadastrale*, version 4.0 (mai 2026). Comparée à la version 4.1 ; apport distinct : le caractère palindromique de chaque étage de la pyramide de la spirale, et la phrase de clôture du § 9 sur « la frontière nette entre le prouvé et l'à-prouver » (chapitre 15).
16. **Les_Nombres_qui_se_Souviennent_v1.txt.** *Les Nombres qui se Souviennent. Les nombres de Kaprekar comme arithmétique de la mémoire* (juin 2026). Apport : tout le chapitre 17.
17. **L_Enigme_196_v1.txt.** *L'Énigme 196. Pourquoi un nombre ne ferme jamais* (juin 2026). Apport : tout le chapitre 18.
18. **Bastos_2026_Recreational_Mathematics_Illusion3.txt.** *The Recreational Mathematics Illusion: Why 198, 496, and 1729 Are Structural Constants* (février 2026, anglais, traduit). Apport : chapitre 19, sections 19.1 à 19.7 et 19.10.
19. **Bastos_2026_The_Fractal_Bridge.txt.** *The Fractal Bridge: How 46 and 64 Become 496 and 694 by Insertion of the Closure Digit* (février 2026, anglais, traduit). Apport : chapitre 19, sections 19.8 à 19.10.
20. **La_Cinquieme_Paire_v1.0_addendum.txt.** *La Cinquième Paire. Le noyau et l'infini comme partenaires d'involution*, version 1.0 et addendum du 7 juillet 2026. Apport : tout le chapitre 20.
21. **BQ_02_Livre_II.txt.** *Bible Quantique v5, Livre II, Le cadastre arithmétique restauré* (mai 2026). Apport : le chapitre 21 (ce qui n'était pas déjà dans les Tomes I et II) ; la cascade des quinze ruptures, résumée avec renvoi au Volume 6.
22. **Positions_tenues_2026.txt.** Positions tenues par l'auteur, septembre et octobre 2026. Apport : les citations sur la spirale du soleil et le 13 (chapitre 15), la définition de la preuve (chapitre 10), la définition de la topologie (chapitre 20), la phrase du centre (chapitre 20), la position du 9 octobre 2026 sur Riemann (chapitre 7). Les autres positions relèvent d'autres volumes.
23. **Bastos_2026_La_congruence_des_paires_v0_2.pdf.** *La congruence des*

paires, v0.2, 11 septembre 2026. Apport : Chapitre 22. La congruence des paires
: le mod qui garde les inverses, en entier, mot pour mot (26 octobre 2026).

Annexe D. Vérifications refaites

Pour ce volume, 164 vérifications ont été refaites par un script indépendant des scripts des sources (Python 3, bibliothèque standard seule ; fichier `verif.py` du dossier du volume, sortie dans `verif_sortie.txt`) : **164 passent, zéro échec**. Les vérifications sont regroupées ci-dessous par famille ; entre parenthèses, la portée.

Feuille et cadastre (chapitres 1 et 2). Axe stérile et boucle-9 interdite (tous les $n < 6 \times 10^6$) ; loi du pavé tordu (neuf ancrages, colonnes, diagonales) ; paire d'inversions 48372615 / 51627384 (renversement = φ , somme 99 999 999, permutations, pas 11, écart 4) ; table des inversions (écarts 7, 5, 3, 1, somme 16, $\frac{1}{2}$ deux fois) ; carrés et cubes en racine ; table du quotient $D + D = G$, $G + G = D$, $D + G = \text{axe}$; invariance de base (bases 4, 7, 10, 12, 16, $n < 5\,000$) ; singularité de la fermeture 9 parmi les clôtures 3k. Résultat : conforme.

Grille, familles, décision (chapitre 3). Auto-génération (1 665 sommes ; indexation $m \leq 10^6$) ; quatre familles contre crible ($k \leq 10^6$) ; décision au point d'équilibre (600 011 premier en 257 tests, $600\,013 = 53 \times 11\,321$, 10 000 019 premier en 1 053 tests, premier suivant 10 000 079). Résultat : conforme, sous les bornes annoncées (260 et 1 056).

Carrés (chapitre 4). 24 divise $p^2 - 1$ pour les 78 496 premiers au-delà de 3 jusqu'à 10^6 ; écarts 24, 72, 48, 120, 72, 168, 312, 120 ; indices 4, 8, 20, 28 ; maximalité de 24 ($n \leq 500$). Résultat : conforme.

Jumeaux (chapitre 5). $J(k)$: 37 915 paires sous 10^6 et 152 890 sous 5×10^6 , coïncidant exactement avec les k hors familles. Résultat : conforme.

Registre et Root-9 (chapitres 6 et 7). Th 10 (1/7, 1/11, 1/17, 1/97 ; tous les premiers 7 à 2 000 ; 1/49 et 1/529) ; $S(10^{12}) = 1\,000\,000\,000\,039$; joints $36m^2 - 1$ de racine 8 ($m \leq 10^5$) ; Th 13 volet 1 (424 575 424 577 à $K = 10^{12}$, validé par énumération à 10^5) ; Th 13 volet 2 (973 858 et terme principal 973 855,87) ; identité binomiale du Th 15 ; prédictions 359,6 et 3,34 du Th 16. Résultat : conforme ; le produit 88 913 825 du Th 16 vaut $1\,616\,615 \times 55$ (Annexe B, n° 17).

Collatz (chapitres 8 à 10). Th 17 et 18 ; sentinelles 37 et 31 ; $2^k - 1$; orbite de 27 (9 232) ; Th 21 ; Th 22 (« au moins k », $k = 1$ à 10) ; Th 23 (54 cases pleines sur les impairs $< 2 \times 10^6$) ; Th 24 (une maison pour +1, deux pour +7, au moins trois pour +5, +11, +13 sur 1 à 20 000) ; Th 25 exact en fractions ($n \leq 3\,000$) et les cinq bilans du tableau ; Th 26 ($n < 200\,000$) ; Lecture 27 (7, 55, 3, 9, 27, dernier $L > n$ en 110) ; Th 29 ($n < 100\,000$) ; Th 37 (a, c avec rapport 2,000, d, e, f) ; Lecture 36 (18 et 8 termes) ; Lecture 35 (cycle de 13 sous $5n + 1$, $\log_2 3$ et $\log_2 5$). Résultat : conforme.

Goldbach (chapitre 11). G.1 ($2n \leq 4\,000$) ; G.3 (exemples 18, 36, 54, 72, 90 ; tous les multiples de 18 sous 20 000) ; G.5 ; Th 30 (fractions $1/3$ et $2/3$; rapport 1,999 autour de 300 000) ; Th 32 ($\{3, 5\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{3, 5, 7, 11\}$, tous les restes) ; primorielle et $\ln 10^6$; remarque sur $8/5$ (rapport 1,60 entre centres multiples de 35 et centres premiers à 35). Résultat : conforme.

Ajouts v0.5 (chapitre 12). Th 39 : les cinq valeurs exactes de Q_G , leurs racines, l'égalité formule = énumération sur le tour complet pour $\{5\}$, $\{5, 7\}$, $\{5, 7, 11\}$, $\{7, 13\}$, les rapports 0,953 et 0,989 ; Th 40 : l'exemple 364, l'identité sur les 40 000 produits $A, B \leq 200$, le témoin 117 / 198 ; Th 41 : les 6 561 restitutions et le témoin à centre 4,5. Résultat : conforme.

24, jumeaux, cascades (chapitres 13 à 16). $\sigma(24)$; unicité de $\sigma(n) = 5n/2$ sous 10^6 ; hémiparfaits suivants ; chaîne aliquote ; 36 seul carré triangulaire ; cassures 24, 36, 48, 54 ; période 24 de Fibonacci en racine et son pli en inverses ; rapport 4 aux clôtures 9^k ($k \leq 5$) ; boulets (4 900, seule solution non triviale sous 10^4) ; deux marches ; rendement de l'outil aveugle 2280/1751 ; 4,1 % hypergéométrique ; puissances de 5 et de 7 en racine ; deux espèces de jumeaux (4 046 et 4 122) ; Fermat et Euler (premiers $< 2\,000$) ; $n \mid F_n$; cascades de 1681 et de ses permutations, des rails purs, de $1 \rightarrow 9$, $9 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 8$, du pavé ; spirale du soleil (suite, empreinte, somme 39, pyramide palindromique, 484, 33, pointe 6) ; 137 trente-troisième premier ; $11 \rightarrow 2$; produit hexagonal (lignes 2 à 199) ; bord et restitution (66 429 séquences) ; XXXX $\rightarrow 9 - X$; 576 ; fractale ternaire (lignes 0 à 200) ; lignes 3^k ($k \leq 7$) ; Wallis ; g/π^2 ; $\theta^2/16$; puissances de 2. Résultat : conforme ; seule la phrase « une suite symétrique pointe sur 6 » échoue (Annexe B, n° 19).

Nombres qui se souviennent, 196, récréatifs (chapitres 17 à 19). 54 nombres de Kaprekar sous 10^6 , tous de racine 9 ou 1 ; paires et queues ; 142857 ; purs-neufs ; Iannucci sur 999 ; triangulaires ; 13 candidats de Lychrel sous 1 000 et leurs racines ; 249 sous 10 000 (avec 300 itérations au lieu de 1 000) ; fusion en 887 ; 196 sans pas sans retenue sur 60 pas ; largeur 4 divisible par 11 ; demi-point ; lois des miroirs ; paires internes de 198 ; 1729 ; pavé trié ; $SO(32)$; descente au pas de 101 ; différences croisées du pont fractal ; identité qui reclasse la prédiction (ii) ; Euler pour le cube et le prisme ; racines des cubes. Résultat : conforme.

Cinquième paire et Livre II (chapitres 20 et 21). $n = 9k + DR(n)$ ($n < 500\,000$) ; décompression en deux pas ; tables en racine et leurs sommes (99 999 999, 100 900 899) ; factorisation de 99 999 999 ; trois alignements ; centre des clôtures 5 à 13 ; involution inversive (100 000 points) ; table de multiplication en racines, lignes inverses et renversées ; rails multiplicatifs ; 9, 27, 45, 63 ; triplets miroirs ; carré 3×3 ; triplet 578 ; échec du chemin 5 ; non-discrimination de la « réponse arithmétique ». Résultat : conforme aux énoncés retenus ; les deux énoncés écartés le sont par le calcul (Annexe B, n° 13 et 26).

Relectures du cadastre (section 19.11, 15 octobre 2026). Racines des cubes 1 à 999 ($\{1, 8, 9\}$) ; racines des sommes de deux cubes de bases < 200 ($\{1, 2, 7, 8, 9\}$) ; nombres taxicab sous 400^3 (racines 9, 8, 1, 7, 2) ; Fermat $m = 1$ à 11 (5, 8 en alternance) et produit $F(m) - 2$; $641 \times 6\,700\,417 = F(5)$; Mersenne pour tous les premiers $5 \leq p < 400$; racine 7 de $2^n - 1$ seulement pour n multiple de 3 ; $F(n) + F(n + 12) = 18 F(n + 6)$ pour $n \leq 200$; $T(31) = 496$, $K(496) = K(495) = 495$; 211

couples consécutifs de même pas de Kaprekar.

Section 9.7 (15 octobre 2026). Écriture en racines-chiffres et parité ($n < 10^6$) ; duo lisible et collisions en 5 (orbites jusqu'à 300 000) ; nombre de moitiés à 6 près (333 332 impairs) ; arbre inverse (impairs jusqu'à 3 000) ; axe jamais revisité (orbites jusqu'à 200 000) ; séries de 1 et libération (impairs jusqu'à 200 000) ; $2^p - 1 \rightarrow 3^p - 1$ ($p \leq 39$) ; graines des mots répétés (tous les mots jusqu'à 14 coups, fractions exactes) ; mots de parité ($L = 8, 12, 16$) ; cycles 13 et 17 de $5n + 1$.

Ce qui n'a pas été refait. Les mesures de temps (49 ms, 7,19 s et 0,67 s, 0,07 ms) ; les mesures du résidu replié du Tome I (excursions 2,98, 6,57, 14,32 ; anatomie de $K = 52\,500$; 12,26 et 5,41 du Th 15 ; 360 et 3 alignements observés du Th 16) ; les écarts-types de la Lecture 33 au-delà de 3×10^5 ; l'unicité de 24 entre 10^6 et 10^7 ; les 160 000 produits du second code du Th 40 ; les faits d'archive (Pólya, Littlewood, Mertens, Simons et de Weger, Hercher, Green et Schwarz, Shechtman, constantes physiques, données chimiques et biologiques), cités avec leur source. Les tests de Madelung (sept exceptions sur dix-neuf) reposent sur la liste des vingt exceptions de la pièce, reprise sans être recompilée.

Colophon

Modèle, questions, lectures et règles : Filipe Bastos. Scribe : Claude, sous la contradiction de l'auteur. Calculs, formulations et audits assistés par IA (ChatGPT, Gemini, DeepSeek, GLM), à sa demande.

Corpus ARC, Filipe Bastos, CC BY 4.0.