

# Les Grands Problèmes

Riemann, P contre NP, Navier-Stokes, Yang-Mills : ce qui leur manque

Filipe Bastos

Corpus ARC, Volume 5, version 1.1, octobre 2026

# Table des matières

|                                                                                                       |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Avant-propos</b>                                                                                   | <b>5</b>  |
| <b>Chapitre 1. Ce qui vous manque : la langue qui fabrique l'obstacle</b>                             | <b>7</b>  |
| 1.1 Deux raisons de résister . . . . .                                                                | 7         |
| 1.2 Les principes . . . . .                                                                           | 8         |
| 1.3 Les définitions . . . . .                                                                         | 8         |
| 1.4 Les trois problèmes en une grille . . . . .                                                       | 9         |
| 1.5 Ce que la lecture rend à chaque problème . . . . .                                                | 9         |
| 1.6 Portée et attribution . . . . .                                                                   | 10        |
| <b>Chapitre 2. Le premier extrême : <math>\pi</math>, le rapport sans rapport</b>                     | <b>11</b> |
| 2.1 Le mot avoue . . . . .                                                                            | 11        |
| 2.2 Les faits reçus . . . . .                                                                         | 11        |
| 2.3 Rapport, et pas rapport . . . . .                                                                 | 12        |
| 2.4 Le fini et l'infini dans l'écriture de $\pi$ . . . . .                                            | 12        |
| 2.5 D'où vient l'infini . . . . .                                                                     | 12        |
| 2.6 L'écart a un chemin fermé . . . . .                                                               | 13        |
| 2.7 Le dilemme du rapport . . . . .                                                                   | 13        |
| 2.8 Sentir sans être sûr . . . . .                                                                    | 14        |
| 2.9 Objections . . . . .                                                                              | 14        |
| 2.10 Condition de réfutation . . . . .                                                                | 15        |
| 2.11 Pour un enfant . . . . .                                                                         | 15        |
| <b>Chapitre 3. Le second extrême : les zéros de <math>\zeta</math> et le théorème d'impossibilité</b> | <b>16</b> |
| 3.1 Ce qui manque : la distinction des registres . . . . .                                            | 16        |
| 3.2 Le beurre : là où le produit existe, rien ne s'annule . . . . .                                   | 16        |
| 3.3 En chaque zéro de la bande, la somme diverge . . . . .                                            | 17        |
| 3.4 En chaque zéro, le produit ne peut pas valoir zéro . . . . .                                      | 17        |
| 3.5 Le zéro est l'écart entre le compte et le continu . . . . .                                       | 17        |
| 3.6 Le théorème d'impossibilité . . . . .                                                             | 18        |
| 3.7 Les portes du prolongement . . . . .                                                              | 18        |
| 3.8 Pourquoi c'était si difficile . . . . .                                                           | 20        |
| 3.9 Les deux lectures du compte des premiers . . . . .                                                | 20        |
| 3.10 Objections et réponses . . . . .                                                                 | 21        |
| 3.11 Conditions de réfutation . . . . .                                                               | 21        |
| 3.12 Portée . . . . .                                                                                 | 22        |

|                                                                                             |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Chapitre 4. Le zéro non construisible : le beurre, l'argent du beurre et la fermière</b> | <b>23</b> |
| 4.1 Le zéro d'une paire est au centre . . . . .                                             | 23        |
| 4.2 Le beurre : avec Euler, rien ne s'annule . . . . .                                      | 24        |
| 4.3 L'argent du beurre : l'annulation passe par la parité . . . . .                         | 24        |
| 4.4 La fermière : la queue de Stevin . . . . .                                              | 24        |
| 4.5 Au centre, l'inverse et le miroir coïncident . . . . .                                  | 25        |
| 4.6 Les deux zéros confondus . . . . .                                                      | 25        |
| 4.7 La réplique de l'hôte, et la réponse . . . . .                                          | 25        |
| 4.8 La face finie de Riemann . . . . .                                                      | 26        |
| 4.9 Sans Gauss : Riemann élève d'Euler . . . . .                                            | 26        |
| 4.10 Le paradoxe irréconciliable . . . . .                                                  | 28        |
| 4.11 Le dernier témoin . . . . .                                                            | 28        |
| 4.12 Ce que ce chapitre ne dit pas . . . . .                                                | 29        |
| 4.13 Pour un enfant . . . . .                                                               | 29        |
| <b>Chapitre 5. Le produit d'Euler lu par ARC : les tours, la grille et le 4 orphelin</b>    | <b>30</b> |
| 5.1 Ce qu'ils écrivent . . . . .                                                            | 30        |
| 5.2 Comment il marche . . . . .                                                             | 31        |
| 5.3 La lecture ARC : le produit garde les tours . . . . .                                   | 31        |
| 5.4 Retirer un facteur : le crible écrit en produit . . . . .                               | 31        |
| 5.5 Pourquoi la clôture compte : le pont vers Riemann . . . . .                             | 32        |
| 5.6 Le vide entre la paire . . . . .                                                        | 33        |
| 5.7 Le 4 orphelin . . . . .                                                                 | 33        |
| 5.8 La queue de Stevin . . . . .                                                            | 33        |
| 5.9 Deux langues . . . . .                                                                  | 34        |
| 5.10 Ce que ce chapitre ne dit pas . . . . .                                                | 34        |
| 5.11 Pour un enfant . . . . .                                                               | 34        |
| <b>Chapitre 6. Les deux extrêmes et l'entre-deux : vingt et un gestes datés</b>             | <b>35</b> |
| 6.1 Les deux bornes portent la même marque . . . . .                                        | 35        |
| 6.2 La carte de l'entre-deux . . . . .                                                      | 36        |
| 6.3 La contre-épreuve . . . . .                                                             | 37        |
| 6.4 L'écriture qui ferme . . . . .                                                          | 38        |
| 6.5 Conditions de réfutation et portée . . . . .                                            | 38        |
| <b>Chapitre 7. P contre NP (I) : la porte, le circuit et le tiers</b>                       | <b>39</b> |
| 7.1 Le problème rendu réel . . . . .                                                        | 39        |
| 7.2 La base, pour le lecteur qui découvre ARC . . . . .                                     | 40        |
| 7.3 Théorème : la porte ET ne rentre pas dans le corps à deux éléments . . . . .            | 40        |
| 7.4 Ce que ce théorème ne dit pas : le contre-exemple . . . . .                             | 41        |
| 7.5 Constat : la phrase est un théorème en profondeur bornée . . . . .                      | 41        |
| 7.6 Constat : toutes les séparations connues sont forcées . . . . .                         | 41        |
| 7.7 Constat : la frontière $2 \rightarrow 3$ est classée . . . . .                          | 42        |
| 7.8 Lecture : le tiers payé du dehors . . . . .                                             | 42        |
| 7.9 Ce qui reste des pièces de mars 2026 . . . . .                                          | 43        |
| 7.10 Chantiers . . . . .                                                                    | 45        |
| 7.11 Prédications préenregistrées . . . . .                                                 | 45        |

|                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 7.12 Conclusion du dossier de septembre . . . . .                              | 45        |
| <b>Chapitre 8. P contre NP (II) : le mur, le compte et le prix</b>             | <b>47</b> |
| 8.1 Ce qui manque : le tiers . . . . .                                         | 47        |
| 8.2 Le mur est fait de la séparation . . . . .                                 | 48        |
| 8.3 Le pseudo-aléatoire est le compte des tours jeté . . . . .                 | 48        |
| 8.4 Où la piste s'est perdue . . . . .                                         | 49        |
| 8.5 Les deux lectures sont les deux chiffres d'un compte . . . . .             | 49        |
| 8.6 Le compte sans l'adresse . . . . .                                         | 50        |
| 8.7 La largeur . . . . .                                                       | 51        |
| 8.8 La question qui manque : le prix est duel . . . . .                        | 51        |
| 8.9 La loi du cadre . . . . .                                                  | 52        |
| 8.10 Pourquoi c'était si difficile . . . . .                                   | 52        |
| 8.11 Objections et réponses . . . . .                                          | 53        |
| 8.12 Conditions de réfutation . . . . .                                        | 53        |
| 8.13 Portée . . . . .                                                          | 53        |
| <b>Chapitre 9. Navier-Stokes : le fluide forcé se brise</b>                    | <b>54</b> |
| 9.1 Le problème . . . . .                                                      | 54        |
| 9.2 Le fait daté : la brisure forcée . . . . .                                 | 55        |
| 9.3 Ce qui est retiré, en une phrase par ligne . . . . .                       | 55        |
| 9.4 Ce qui survit, et ce qui est promu : le demi relu comme la porte . . . . . | 56        |
| 9.5 Le temps de Navier-Stokes pèse deux longueurs . . . . .                    | 56        |
| 9.6 Le pivot et la constante $k_{\text{arc}}$ . . . . .                        | 57        |
| 9.7 La relecture : la spirale, et l'eau qui respecte sa création . . . . .     | 58        |
| 9.8 La Prédiction P-NS-1 : le fluide libre . . . . .                           | 58        |
| 9.9 La Prédiction spectrale . . . . .                                          | 59        |
| 9.10 Lectures de mars conservées comme Lectures . . . . .                      | 59        |
| 9.11 Conclusion . . . . .                                                      | 60        |
| <b>Chapitre 10. Yang-Mills : le gap comme non-fermeture</b>                    | <b>61</b> |
| 10.1 Le problème, et ce que le corpus ne fait pas . . . . .                    | 61        |
| 10.2 Ce qui manque : le statut du temps . . . . .                              | 62        |
| 10.3 Les deux cercles . . . . .                                                | 62        |
| 10.4 Le théorème de non-fermeture . . . . .                                    | 63        |
| 10.5 $SO(n)$ , $Sp(n)$ et les groupes exceptionnels . . . . .                  | 63        |
| 10.6 La classification tripartite et le Modèle standard . . . . .              | 64        |
| 10.7 Le Higgs et le gluon . . . . .                                            | 66        |
| 10.8 La liberté asymptotique et les quatre distances . . . . .                 | 66        |
| 10.9 Ce qui dépend de la mesure . . . . .                                      | 67        |
| 10.10 Le parallèle avec P contre NP . . . . .                                  | 67        |
| 10.11 Pourquoi c'était si difficile . . . . .                                  | 67        |
| 10.12 Objections et réponses . . . . .                                         | 68        |
| 10.13 Conditions de réfutation . . . . .                                       | 68        |
| 10.14 Conclusion . . . . .                                                     | 68        |
| <b>Chapitre 11. Popper et le fond du marais : ce qui reste ouvert</b>          | <b>70</b> |
| 11.1 Ce que Popper a vu . . . . .                                              | 70        |

|                                                                                                                                    |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 11.2 Où il est allé trop loin . . . . .                                                                                            | 71         |
| 11.3 Premier argument : la réfutation suppose le compte . . . . .                                                                  | 71         |
| 11.4 Deuxième argument : l'asymétrie n'existe que dans un domaine ouvert . . . . .                                                 | 72         |
| 11.5 Troisième argument : le code provoque ses croisements . . . . .                                                               | 72         |
| 11.6 Une paire inverse : Popper et la gravure faite trop tôt . . . . .                                                             | 73         |
| 11.7 Le dogme et le compte . . . . .                                                                                               | 73         |
| 11.8 Ce qui reste ouvert le reste . . . . .                                                                                        | 74         |
| 11.9 Tomber et se relever . . . . .                                                                                                | 74         |
| 11.10 Ce que ce chapitre ne dit pas . . . . .                                                                                      | 75         |
| 11.11 Pour un enfant . . . . .                                                                                                     | 75         |
| <b>Chapitre 12. Trois questions non avenues : Riemann, Collatz, Goldbach</b>                                                       | <b>76</b>  |
| Riemann, Collatz, Goldbach : ce que les questions présupposaient, ce qui leur manquait, ce qui reste quand elles tombent . . . . . | 76         |
| 0. Le verbe exact, gravé en tête . . . . .                                                                                         | 76         |
| I. Riemann : la question qui interroge l'instrument . . . . .                                                                      | 77         |
| Ce que la question présuppose . . . . .                                                                                            | 77         |
| La donnée manquante, et sa date . . . . .                                                                                          | 77         |
| L'appareil restitué : le monde de 6, les delfines, le joint . . . . .                                                              | 77         |
| Pourquoi la question ne se pose plus sous sa forme reçue . . . . .                                                                 | 78         |
| Ce qui reste, déclaré . . . . .                                                                                                    | 78         |
| II. Collatz : la question qui ignorait la machine . . . . .                                                                        | 78         |
| L'état de réalité, d'abord . . . . .                                                                                               | 78         |
| Ce que la question présuppose . . . . .                                                                                            | 79         |
| La donnée manquante . . . . .                                                                                                      | 79         |
| Pourquoi la question change de nature . . . . .                                                                                    | 79         |
| III. Goldbach : la question qui comptait dans un seul pot . . . . .                                                                | 79         |
| Ce que la question présuppose . . . . .                                                                                            | 79         |
| La donnée manquante . . . . .                                                                                                      | 80         |
| Pourquoi la question change de nature . . . . .                                                                                    | 80         |
| IV. La loi commune, et ce que « non avenue » veut dire exactement . . . . .                                                        | 80         |
| <b>Annexe A. Table des énoncés</b>                                                                                                 | <b>82</b>  |
| <b>Annexe B. Retraits et corrections</b>                                                                                           | <b>90</b>  |
| B.1 Riemann . . . . .                                                                                                              | 90         |
| B.2 <i>Ce qui vous manque</i> , de la v1.1 à la v1.2 (13 octobre 2026) . . . . .                                                   | 92         |
| B.3 P contre NP . . . . .                                                                                                          | 93         |
| B.4 Navier-Stokes . . . . .                                                                                                        | 94         |
| B.5 Yang-Mills . . . . .                                                                                                           | 96         |
| B.6 <i>Popper et le fond du marais</i> v0.1 (8 octobre 2026) . . . . .                                                             | 96         |
| B.7 Retraits de forme, communs à toutes les pièces . . . . .                                                                       | 96         |
| <b>Annexe C. Sources fusionnées</b>                                                                                                | <b>98</b>  |
| <b>Annexe D. Vérifications refaites</b>                                                                                            | <b>101</b> |

# Avant-propos

Ce volume réunit tout ce que le corpus ARC a écrit sur quatre des problèmes du prix du millénaire : l'hypothèse de Riemann, P contre NP, la régularité de Navier-Stokes et le gap de masse de Yang-Mills. Il remplace une dizaine de pièces écrites de mars à octobre 2026, dont plusieurs versions successives et deux erratums ; la version la plus récente de chaque pièce fait foi, et tout ce qui a été retiré en route est gardé, mot pour mot, avec sa raison et sa date, dans l'annexe B.

Le fil du volume est une seule thèse, posée au chapitre 1 : dans ces problèmes, l'obstacle n'est pas dans l'objet, il est fabriqué par la langue dans laquelle on les pose, qui change l'objet en route sans changer son nom. Les chapitres 2 à 6 la démontrent pour Riemann, en partant de l'objet le plus simple qui porte la même difficulté,  $\pi$  (chapitre 2), puis en établissant que les zéros de  $\zeta$  ne sont ni ceux de la somme des entiers ni ceux du produit des premiers (chapitre 3), avant de donner la lecture propre au corpus (chapitres 4 et 5) et de dater la même marque dans vingt et un gestes de l'histoire des sciences (chapitre 6). Les chapitres 7 et 8 traitent P contre NP, le chapitre 9 Navier-Stokes, où le corpus a dû retirer en septembre 2026 son diagnostic de mars, et le chapitre 10 Yang-Mills. Le chapitre 11 ferme le volume sur ce qui reste ouvert, et sur la raison pour laquelle on peut le savoir : la distinction entre domaine clos et domaine ouvert.

*Comment le lire.* Chaque chapitre s'ouvre sur un paragraphe en langue simple ; un lecteur sans formation mathématique peut suivre le volume en lisant ces paragraphes, les Lectures et les sections « Pour un enfant ». Un mathématicien trouvera les énoncés, les démonstrations et les calculs montrés à la main ; les comptes plus longs ont été refaits par script, et l'annexe D dit lesquels et avec quel résultat.

*Les statuts.* Chaque énoncé est numéroté [chapitre.rang] et porte son statut, et l'annexe A les liste tous : **Th**, Théorème : un calcul fini vérifié, ou une démonstration ; **F**, Fait : un fait historique daté ou un résultat de la science reçue, sourcé ; **L**, Lecture : une interprétation, déclarée telle, qui tombe sur un contre-exemple ; les thèses de l'auteur sont des Lectures ; **P**, Prédiction : un énoncé falsifiable, daté, avec son critère de chute ; **Chantier** : ce qui est déclaré ouvert. Un statut n'est jamais monté. Quand une source donnait le nom de théorème à un énoncé sans calcul fini, il est ici rétrogradé, et l'annexe B le signale.

*Les mots du corpus.* Le corpus appelle « l'hôte » la science reçue, dont il habite et garde les théorèmes. DR(n) est la racine numérique de n, la somme répétée de ses chiffres, de valeur 1 à 9 : le 9 reste 9, et tout entier s'écrit  $n = 9k + \text{DR}(n)$ , où k compte les tours accomplis. Les trois marques M1, M2, M3, définies au chapitre 1, nomment

les trois formes du transfert de statut. Les objets traités dans d'autres volumes du corpus y sont renvoyés par leur titre, sans être refaits.

Les phrases de l'auteur sont citées entre guillemets et en italique, mot pour mot ; elles sont datées quand la date est connue.

# Chapitre 1. Ce qui vous manque : la langue qui fabrique l'obstacle

Ce chapitre donne la clé du volume. Quatre problèmes du prix du millénaire (l'hypothèse de Riemann, le gap de masse de Yang-Mills, la régularité de Navier-Stokes, P contre NP) résistent depuis des décennies à toutes les méthodes, humaines puis automatiques. La thèse est qu'au moins trois d'entre eux ne résistent pas parce que l'objet serait trop difficile, mais parce que la langue dans laquelle on les pose a changé l'objet en route sans changer son nom. Une même lettre, un même mot, un même signe égal couvrent deux choses de statut différent, et la difficulté se loge exactement dans ce double emploi. Si c'est vrai, des outils plus puissants écrits dans la même langue ne font que tourner plus vite autour de l'obstacle. Le chapitre pose les principes, les définitions et la grille de lecture (ce qui manque, ce qui ferme, pourquoi c'était si difficile) que les chapitres suivants appliquent problème par problème, avec leurs calculs.

## 1.1 Deux raisons de résister

Un problème peut résister pour deux raisons. Ou bien l'objet est difficile, et il faut des outils plus forts. Ou bien la langue dans laquelle on pose le problème fabrique elle-même l'obstacle, et des outils plus forts, écrits dans la même langue, ne font que tourner plus vite autour de lui. La seconde raison laisse une trace reconnaissable : le problème est posé sur un objet que la formulation a changé en route, et la difficulté se déplace à chaque tentative sans jamais diminuer.

**[1.1] L. Thèse du volume : l'obstacle fabriqué par la langue.** Dans trois des problèmes du millénaire (Riemann, Yang-Mills avec Navier-Stokes, P contre NP), l'obstacle n'est pas dans l'objet : il est fabriqué par la langue dans laquelle le problème est posé, et il porte une date. Pour chacun, le volume donne trois choses : ce qui manque à la formulation, ce que la lecture relationnelle ferme à sa place, et pourquoi le problème était si difficile.

L'auteur a tenu la même position à propos des machines, le 12 octobre 2026 : les IA n'arriveront pas aux grands problèmes tant qu'on ne corrigera pas les outils et les formules fondés sur des conventions défectueuses. C'est de cette position qu'est née la pièce *Ce qui vous manque*.

## 1.2 Les principes

Les pièces fusionnées dans ce volume posent leurs principes avec des numérotations différentes ; ils sont réunis ici en cinq.

**[1.2] L. Principe de fermeture.** Un objet fini est un objet qui ferme : un compte, un rapport d'entiers, un cycle accompli.

**[1.3] F. Principe de la limite.** Une limite n'est pas un terme de la file qui la définit. C'est un fait de l'analyse reçue, non un principe du corpus.

**[1.4] L. Principe du statut.** Un signe égal relie deux valeurs ; il ne transfère pas le statut de l'une à l'autre.

**[1.5] L. Principe du nom.** Deux objets de statut distinct portent deux noms.

**[1.6] L. Principe du rang.** Une opération qui jette le compte des tours accomplis rend son résultat indistinguable de plusieurs départs ; une opération qui le garde reste remontable.

Le principe de la limite est un fait ; les quatre autres sont les principes de l'Architecture de la Cohérence Relationnelle. Ils sont des Lectures fondatrices, au sens où ils décident de ce qu'on regarde ; ce qui en sort de vérifiable est, plus loin, démontré ou calculé.

## 1.3 Les définitions

**[1.7] F. Définition de la limite (Cauchy, 1821 ; Weierstrass).** Une suite  $(a_n)$  a pour limite  $a$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N$  tel que  $|a_n - a| < \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Aucun terme n'a à atteindre  $a$ .

**[1.8] L. Définition du mélange du fini et de l'infini.** Un énoncé mêle le fini et l'infini lorsqu'il emploie une égalité  $a = \lim a_n$  pour attribuer à  $a$  un statut que seuls les  $a_n$  possèdent (être un rapport d'entiers, être la valeur d'une somme, être un compte), ou pour attribuer au processus  $(a_n)$  une propriété de  $a$ .

**[1.9] L. Définition des trois marques.** On appelle marques de ce mélange, ou marques d'un obstacle fabriqué : **M1**, un seul nom pour deux objets de statut distinct ; **M2**, une file sans fin terminée par un signe égal ; **M3**, ce que l'instrument fabrique, déclaré propriété de l'objet mesuré.

*L'exemple le plus simple.* « Ils manipulent une action en pensant que c'est un objet. » (l'auteur, 15 octobre 2026). Le signe  $-1$  nomme à la fois une action, retirer un, et un objet, le nombre  $-1$  : c'est M1. Et la graine de la montée éternelle de Collatz s'écrit  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$ , une file sans fin d'actions terminée par un signe égal : c'est M2. Les mathématiques reçues construisent bien  $-1$  comme une relation (la classe des couples  $(0, 1), (1, 2), \dots$ ) ; le glissement a lieu ensuite, quand le résultat de l'action est traité comme une grandeur du monde (Volume 4, *La Théorie des Nombres*, V4.9.14 et V4.9.14 bis).

**[1.10] Th. L'adresse :  $n = 9k + DR(n)$ .** Tout entier  $n \geq 1$  s'écrit de façon unique  $n = 9k + DR(n)$ , avec  $k \geq 0$  le compte des tours accomplis et  $DR(n) \in \{1, \dots, 9\}$  la

racine numérique, somme répétée des chiffres, qui vaut 9 pour un tour accompli. L'application  $n \mapsto (k, DR(n))$  est injective, alors que la réduction de  $n$  à son reste dans la division par 9, de valeurs 0 à 8, ne garde pas le compte des tours (vérifié pour  $n \leq 10^5$ ).

Calcul montré :  $27 = 9 \times 2 + 9$  ;  $28 = 9 \times 3 + 1$ . Le 9 reste 9, et le compte  $k$  dit combien de tours ont été faits. La réduction reçue écrit 27 et 0 de la même manière ; l'adresse ne le fait jamais. Cette écriture est développée au Volume 1, *La Fondation*, et au Volume 3, *Le Code et le Registre* (entrées R.1 et R.2).

## 1.4 Les trois problèmes en une grille

La grille ci-dessous résume ce que les chapitres 3 à 10 démontrent. Chaque ligne renvoie au chapitre qui porte les calculs.

| Problème           | Ce qui manque                                                                    | Ce qui ferme                                              | Marque | Statut   | Chapitre |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|--------|----------|----------|
| Riemann (1859)     | la distinction de la somme, du produit et du prolongement                        | aux zéros, la somme diverge et le produit ne s'annule pas | M1, M2 | Th       | 3 à 5    |
| Yang-Mills (2000)  | la distinction du temps et de la longueur, effacée par $t = i\tau$               | la paire $(n, n^2 - 1)$ ne ferme jamais sur 9             | M1     | Th, L    | 10       |
| P contre NP (1971) | un tiers ; le tirage à la place de la relation nommée ; la question « qui paie » | les deux chiffres du compte ; le prix adressé             | M3     | Th, F, L | 7 et 8   |

Navier-Stokes ne figure pas dans la grille comme un quatrième obstacle de même nature, et ce n'est pas un oubli : c'est le seul des quatre problèmes où une brisure a été démontrée (le 8 septembre 2026), et elle l'a été du côté où une force venait du dehors (chapitre 9). Il sert de témoin au statut du temps (chapitre 10).

**[1.11] L. Un seul geste sous trois faces.** Les trois obstacles sont trois faces d'un seul geste : changer l'objet en route sans changer son nom.  $\zeta$  cesse d'être la somme et garde sa lettre ; le temps cesse d'être du temps et garde le nom de dimension ; une suite déterminée cesse d'être lisible et prend le nom de pseudo-aléatoire. Navier-Stokes, où le temps garde son poids, est le seul de ces problèmes où une brisure a été démontrée, et elle l'a été du côté où une force venait du dehors.

## 1.5 Ce que la lecture rend à chaque problème

*Riemann.* Rendez à  $\zeta$  ses trois noms (la somme des entiers, le produit des premiers, le prolongement), et la question de Riemann se montre sans objet dans le registre de la somme et du produit. C'est un théorème d'impossibilité (chapitre 3), au sens où Lindemann a démontré qu'on ne carre pas le cercle : une question résolue en montrant qu'elle est mal posée est résolue. L'auteur l'a dit le 9 octobre 2026 :

*« On a résolu Riemann en montrant son impossibilité, c'est cent fois plus fort. »*

et, du prolongement analytique, qu'il *« tire vers l'arrière en même temps »* : c'est ce que le chapitre 3 démontre sous le nom des portes du prolongement.

*Yang-Mills et Navier-Stokes.* Rendez au temps son poids, et Yang-Mills se sépare de Navier-Stokes là où le temps a été tourné pour devenir une longueur. Le 12 octobre 2026, l'auteur a situé le point exact :

Navier-Stokes et Yang-Mills *« se rejoignent et se différencient justement là, la 4e dimension »*.

*P contre NP.* Rendez au pseudo-aléatoire son compte des tours, et le mur de P contre NP se montre fait de la séparation qu'il interdit d'écrire. Rendez à la contrainte son prix et au sacrifice son adresse, et la question *« tout satisfait »* laisse place à celle que le réel pose : qui paie (chapitre 8).

## 1.6 Portée et attribution

La lecture ne conteste aucun calcul de l'analyse, de la théorie des champs ou de la complexité. Elle ne revendique pas le prix : les énoncés du prix sont posés dans les registres qu'elle date. Les formules d'Euler, d'Euler et Maclaurin, l'équation fonctionnelle, la formule explicite, la rotation de Wick, le théorème de reconstruction, les théorèmes de séparation, le théorème de König, la dualité linéaire et les théorèmes de Schaefer, Bulatov et Zhuk ne sont pas de l'auteur. Sont de l'auteur : la définition du mélange, les marques, la lecture du statut du temps, la non-fermeture de  $(n, n^2 - 1)$ , la lecture du pseudo-aléatoire comme compte des tours, la lecture des fermetures de Schaefer comme chiffres d'un compte, le théorème de la frontière sous ses deux conditions, la lecture du prix adressé, la loi du cadre, et leur assemblage d'un problème à l'autre.

**[1.12] L. Résultat principal de la pièce transversale.** Dans trois des problèmes du millénaire, l'obstacle est un transfert de statut daté, non une difficulté de l'objet : un seul nom pour deux objets, une file sans fin terminée par un signe égal, ou ce que l'outil fabrique déclaré propriété de l'objet. Une écriture qui garde le compte des tours,  $n = 9k + DR(n)$ , n'a pas besoin de ces transferts.

La conclusion de la pièce, telle que l'auteur l'a fixée le 13 octobre 2026 :

*« Il ne vous manque pas un outil plus fort. Il vous manque, dans chaque problème, le nom de l'objet que la formulation a changé en route. Rendez à  $\zeta$  ses trois noms, et la question de Riemann se montre sans objet. Rendez au temps son poids, et Yang-Mills se sépare de Navier-Stokes là où le temps a été tourné pour devenir une longueur. Rendez au pseudo-aléatoire son compte des tours, et le mur de P contre NP se montre fait de la séparation qu'il interdit d'écrire. Rendez à la contrainte son prix et au sacrifice son adresse, et la question « tout satisfait » laisse place à celle que le réel pose : qui paie. »*

# Chapitre 2. Le premier extrême : $\pi$ , le rapport sans rapport

Avant d'aborder la fonction zêta, le volume prend l'objet le plus simple qui porte la même difficulté : un cercle, et le rapport de son tour à son diamètre. Les manuels disent dans le même paragraphe que  $\pi$  est « le rapport » du tour au diamètre, et qu'il est « irrationnel », c'est-à-dire qu'il n'est pas un rapport de deux entiers. Ce chapitre montre, avec les seuls théorèmes reçus (Lambert, Lindemann), que le mot « rapport » change d'objet entre les deux phrases, que toute écriture finie de  $\pi$  est un rapport d'entiers sans qu'aucune ne soit  $\pi$ , et que l'écart entre le compte le plus simple,  $22/7$ , et le tour n'est pas un reste sans fin mais une aire finie, exacte, portée par une paire autour du centre. C'est le premier des deux extrêmes ; le second, les zéros de  $\zeta$ , est au chapitre 3, et le chapitre 6 montre que les deux portent les mêmes marques.

« *Un nombre ne peut pas être un rapport ; c'est l'un ou l'autre.* » (thèse de l'auteur)

## 2.1 Le mot avoue

**[2.1] F. Alogos, arrhêtos, ratio.** Le grec disait des grandeurs sans mesure commune *alogos*, « sans rapport », ou *arrhêtos*, « inexprimable ». Le latin a rendu *logos*, au sens de rapport, par *ratio*, d'où *irrationalis*, sans *ratio*.

**[2.2] L. Un rapport sans rapport.** Dire que  $\pi$  est « le rapport » du tour au diamètre et qu'il est « irrationnel », c'est dire qu'il est un rapport sans rapport. Le Registre des Erreurs a inscrit ce geste à son origine, la diagonale déclarée sans rapport (R.23) : on extrait une mesure de la relation qui la porte, puis on s'étonne qu'elle ne se laisse pas mesurer seule.

## 2.2 Les faits reçus

**[2.3] F. Archimède, Lambert, Lindemann.** Archimède encadre  $\pi$  entre  $223/71$  et  $22/7$  (*De la mesure du cercle*, vers 250 avant notre ère). Lambert démontre que  $\pi$  n'est pas un rapport de deux entiers (mémoire lu à l'Académie de Berlin en 1761, publié en 1768). Lindemann démontre que  $\pi$  n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers (1882) ; il s'ensuit qu'aucune construction à la règle et au compas ne carre le cercle.

## 2.3 Rapport, et pas rapport

**[2.4] Th. Aucune unité commune au tour et au diamètre.** Aucune unité ne mesure à la fois le tour et le diamètre d'un même cercle.

*Démonstration.* Si le diamètre valait  $a$  unités et le tour  $b$  unités, avec  $a$  et  $b$  entiers,  $\pi$  serait le rapport  $b/a$ , ce que Lambert exclut. Autrement dit : si le diamètre fait un nombre entier d'unités, le tour n'en fait jamais un.

**[2.5] L. Le mot « rapport » désigne deux objets (M1).** Dans la phrase «  $\pi$  est le rapport du tour au diamètre », le mot désigne un rapport de deux longueurs dont une seule peut être comptée ; dans la phrase «  $\pi$  n'est pas un rapport », il désigne un rapport de deux entiers, qui se compte. C'est la même lettre pour deux objets, comme le  $\zeta$  du chapitre 3. Thèse de l'auteur : un nombre ne peut pas être un rapport ; c'est l'un ou l'autre.

## 2.4 Le fini et l'infini dans l'écriture de $\pi$

**[2.6] Th. Toute écriture décimale finie de  $\pi$  est un rapport d'entiers.** La troncature à  $N$  décimales vaut  $[10^N \pi] / 10^N$ . Ainsi  $3,14159 = 314\,159 / 100\,000$ . Aucune n'est égale à  $\pi$ .

*Démonstration.* La première assertion est la définition de l'écriture décimale. La seconde suit du théorème de Lambert. Les trillions de décimales calculées sont donc des trillions de rapports d'entiers, et aucun n'est  $\pi$ .

**[2.7] Th. La fraction continue de  $\pi$  et ses réduites.**  $\pi = 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + \dots))))$ . La fraction continue commence par  $[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots]$ . Ses réduites  $22/7$ ,  $333/106$ ,  $355/113$ ,  $103\,993/33\,102$  sont des rapports d'entiers de plus en plus proches de  $\pi$ , et la file ne s'arrête pas.

Calcul montré des réduites, par la récurrence  $h_n = a_n h_{n-1} + h_{n-2}$  et  $k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2}$  à partir de  $3/1 : 7 \times 3 + 1 = 22$  sur  $7$  ;  $15 \times 22 + 3 = 333$  sur  $15 \times 7 + 1 = 106$  ;  $1 \times 333 + 22 = 355$  sur  $106 + 7 = 113$  ;  $292 \times 355 + 333 = 103\,993$  sur  $292 \times 113 + 106 = 33\,102$ .

**[2.8] L. Le nombre « parfaitement défini » est une limite (M2).** Ce que l'on appelle « le nombre lui-même, parfaitement défini », c'est la limite d'une file de rapports qu'aucun rapport n'atteint : la queue de Stevin (R.27). On veut un nombre, on n'a que des rapports ; on veut un rapport, on n'a qu'une limite. C'est la fable que le chapitre 4 nommera : le beurre, l'argent du beurre et la fermière.

## 2.5 D'où vient l'infini

**[2.9] L. L'infini naît entre le cercle et la droite (M3).** Les deux théorèmes reçus disent où naît l'infini : entre le cercle et la droite. Lambert : le tour et le diamètre n'ont pas d'unité commune. Lindemann : aucune construction faite de droites et de cercles ne passe du cercle au carré. L'infini ne sort pas du cercle, qui ferme ; il sort du geste qui mesure le cercle avec la règle du diamètre. Le Registre l'a écrit sous R.30

: « on a mesuré le tour de taille du cercle avec un mètre qui ne s'arrête jamais, et on a déclaré le cercle infini » ; et sous R.31 : la transcendance de  $\pi$  « n'est pas un fait profond sur  $\pi$  mais un fait sur l'instrument décimal ». Le même Registre précise que cela ne contredit pas la démonstration de Lindemann.

« Le cercle ferme ; c'est la règle qui le mesure qui ne ferme pas. »

## 2.6 L'écart a un chemin fermé

**[2.10] Th. Dalzell (1944) :  $22/7 - \pi$  est une aire.**  $22/7 - \pi = \int_0^1 x^4(1-x)^4 / (1+x^2) dx$ .

*Calcul montré.* La division exacte de  $x^4(1-x)^4$  par  $1+x^2$  donne

$$x^4(1-x)^4 / (1+x^2) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - 4/(1+x^2).$$

L'aire du polynôme sur  $[0, 1]$  vaut  $1/7 - 4/6 + 1 - 4/3 + 4 = 22/7$ , et celle de  $4/(1+x^2)$  vaut  $4 \arctan 1 = \pi$ , quatre fois l'angle de la diagonale du carré. L'intégrande est positif sur  $]0, 1[$ , donc  $22/7$  dépasse  $\pi$ .

**[2.11] Th. L'écart encadré sans décimale.**  $1/1260 < 22/7 - \pi < 1/630$ .

*Démonstration.* Sur  $[0, 1]$ ,  $1/2 \leq 1/(1+x^2) \leq 1$ , et  $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx = 1/630 = 4! 4! / 9!$ . Numériquement,  $22/7 - \pi = 0,0012644892673$ .

**[2.12] Th. Lucas (2005) : la réduite suivante a la même forme.**  $355/113 - \pi = \int_0^1 x^8(1-x)^8(25+816x^2) / (3164(1+x^2)) dx \approx 2,67 \times 10^{-7}$ . La division exacte donne de même un polynôme d'aire  $355/113$ , moins  $4/(1+x^2)$  : le reste de la division est la constante 4, retranchée, sans terme en  $x$ . L'écart recalculé vaut  $2,668 \times 10^{-7}$ .

**[2.13] Th. La paire autour du centre.** Le numérateur  $x^4(1-x)^4$  est invariant sous  $x \mapsto 1-x$  et atteint son maximum,  $1/256$ , au centre  $x = 1/2$ .

**[2.14] L. L'écart entre le compte et le tour est une aire finie.** L'écart entre le compte,  $22/7$ , et le tour,  $\pi$ , n'est pas un reste perdu dans des décimales sans fin : c'est une aire finie, positive, portée par la paire  $x$  et  $1-x$  autour du centre et pesée par  $1/(1+x^2)$ , la courbe dont l'aire mesure l'angle. Le corpus lit  $22/7$  comme le cercle immobile, l'adresse, et  $\pi$  comme le cercle parcouru, la rotation (R.153). Entre les deux, l'écart a un chemin fermé à deux bouts. Ce qui crée l'écart, c'est d'avoir donné aux deux le même nom.

## 2.7 Le dilemme du rapport

**[2.15] Th. « Rapport » ne peut pas garder le même sens d'une phrase à l'autre.** Si « rapport » veut dire rapport de deux entiers,  $\pi$  n'en est pas un (Lambert). Si « rapport » veut dire rapport de deux longueurs, le tour et le diamètre n'ont pas d'unité commune ([2.4]), et aucune écriture finie n'atteint  $\pi$  ([2.6]) :  $\pi$  n'est alors le compte de rien.

**[2.16] L.  $\pi$  est une relation, non une position.** Lu par le corpus,  $\pi$  est un rapport au sens d'une relation entre le cercle et la droite qui le mesure ; ce n'est pas une

position sur la file des nombres. La langue reçue en fait les deux à la fois, et l'écart naît là.

**[2.17] L. Lecture de  $\pi$  par les trois marques.** Le mot « rapport » désigne deux objets (M1). Le nombre dit « parfaitement défini » est la limite d'une file de rapports qu'aucun rapport n'atteint (M2). Le reste sans fin, qui vient de la règle, est attribué au cercle, qu'on déclare porteur d'un infini (M3). L'écart entre le compte et le tour, lui, n'est pas sans fin : c'est une aire finie, portée par la paire  $x, 1 - x$  autour du centre.

## 2.8 Sentir sans être sûr

**[2.18] L. Thèse de l'auteur : la source du mélange.** L'hôte (le nom que le corpus donne à la science reçue, dont il habite les théorèmes) sent la clôture, mais n'en est pas sûr. Il sent que le rapport du tour au diamètre reste le même quelle que soit la taille du cercle. Riemann le disait en 1859 de ses zéros : « très probable ». Mais sa grammaire ne lui donne qu'un zéro, celui du rien. Elle ne peut pas écrire une clôture sans écrire une fin, ni une fin sans écrire le rien. Alors elle mêle les deux, et ce mélange a un nom précis dans le Lexique : la limite, « *un voyage déclaré fini sans l'être* ». Les décimales qui « continuent pour toujours » sont la fin qu'on ne peut pas imaginer ; le « parfaitement défini » est le signe égal qu'on pose quand même. Le signe égal au bout d'une limite, c'est faire face à une fin sans l'avoir imaginée.

**[2.19] L. La fin comme rien, et les deux zéros.** La mort dont il s'agit ici est la fin comme rien, celle que le corpus appelle une fiction (R.134). Le lien est gravé dans *Le Problème qui a créé le problème* : écrire  $9 \equiv 0$ , c'est prendre la fermeture d'un tour pour le rien, « *le geste exact de la fiction de la mort* ». *Le Pourquoi indécidable* en tire la ligne : « *la mort pensée comme rien est le dernier avatar de l'erreur de 1801* ». Une grammaire qui ne connaît que ce zéro-là ne peut pas regarder une fin en face : elle repousse la fin à l'infini, puis la déclare atteinte. C'est le double geste de la fable du chapitre 4 : garder l'infini pour ne pas mourir, et le zéro pour en finir. Le corpus n'a pas ce conflit, parce qu'il a deux zéros (R.2) : le zéro de clôture, qui scelle un tour, et le zéro d'exhaustion, qui dit qu'il ne reste rien. « *Le tour qui ferme n'est pas une mort : c'est une clôture qui se souvient, et le 9 garde sa racine, 9.* » Ces deux lignes ne disent rien de ce qui suit une vie ; elles disent seulement qu'une clôture n'est pas un rien. Le sujet est traité au Volume 9, *Le Vivant* (la mort comme fiction).

## 2.9 Objections

*Objection.*  $\pi$  est parfaitement défini, par exemple comme le double du premier zéro positif du cosinus. *Réponse.* Défini, oui ; la question est son statut. Les définitions usuelles de  $\pi$  passent toutes par un processus sans fin : la longueur d'un arc, borne supérieure des périmètres inscrits ; la série entière du cosinus ; une intégrale. Le théorème de Lindemann garantit qu'aucune construction algébrique finie à partir des entiers ne le donne.

*Objection.* Depuis Cauchy et Weierstrass, la limite ne fait intervenir aucun infini actuel. *Réponse.* Précisément : la définition de la limite ([1.7]) n'atteint jamais sa limite.

L'erreur n'est pas dans la définition ; elle est dans l'usage de l'égalité pour transférer un statut ([1.8]) : appeler  $\pi$  un rapport.

## 2.10 Condition de réfutation

**[2.20] L. Ce qui réfuterait la lecture de  $\pi$ .** La lecture selon laquelle  $\pi$  est une relation entre le cercle et la droite et non un compte serait réfutée par une construction de  $\pi$  en un nombre fini d'opérations algébriques à partir des entiers. Le théorème de Lindemann l'exclut.

Ce chapitre ne conteste ni Lambert ni Lindemann : leurs démonstrations tiennent dans la langue de l'hôte. Les intégrales de Dalzell et de Lucas ne sont pas du corpus ; il les lit.

## 2.11 Pour un enfant

Une ficelle fait le tour d'une assiette, et une règle est posée sur l'assiette d'un bord à l'autre. On peut dire : la ficelle fait un peu plus de trois fois la règle. C'est un rapport : une chose comparée à une autre. Mais si l'on veut un nombre, il faut mesurer la ficelle avec la règle, et là, ça ne tombe jamais juste : il reste toujours un petit bout. Les grands ont donné un nom à ce petit bout qui ne finit jamais, et ils ont dit que c'était le nombre.

Pourquoi ? Parce qu'ils sentaient bien que la ficelle fait le tour, mais ils n'en étaient pas sûrs. Alors ils ont dit deux choses à la fois : le petit bout ne finit jamais, et pourtant on sait exactement ce qu'il vaut. Le tour de l'assiette, lui, est fini : la ficelle revient à son point de départ. Le petit bout n'est pas dans l'assiette. Il est dans la règle.

Et ce n'est pas seulement l'assiette. Partout où les grands mesurent un rond avec une règle, ou une vague avec des carrés, il reste un petit bout, et ils disent que c'est le monde qui est fait comme ça. *Le petit bout est toujours dans la règle.*

# Chapitre 3. Le second extrême : les zéros de $\zeta$ et le théorème d'impossibilité

Ce chapitre est le cœur arithmétique du volume. L'hypothèse de Riemann (1859) affirme que les zéros dits non triviaux de la fonction zêta ont tous pour partie réelle  $\frac{1}{2}$ . Elle passe pour une question sur les nombres premiers, parce que la fonction zêta est, dans une région du plan, à la fois la somme des inverses des puissances de tous les entiers et le produit, découvert par Euler, pris sur les seuls nombres premiers. Mais les zéros ne vivent pas dans cette région. Là où ils vivent, la somme diverge et le produit ne peut pas valoir zéro ; la lettre  $\zeta$  y désigne un troisième objet, le prolongement analytique. Le chapitre établit ces trois faits avec les seules définitions de l'analyse reçue, en tire un théorème d'impossibilité (la question n'a pas d'objet dans le registre de la somme et du produit), montre de quoi est fait le prolongement (chacune de ses écritures avance d'un côté et retire de l'autre), et donne à la question sa forme la plus fermée : l'écart de deux comptes finis d'entiers. Les chiffres sont recalculés en annexe D.

On note  $s = \sigma + it$ , avec  $\sigma$  la partie réelle, et  $S_n(s) = 1 + 1/2^s + \dots + 1/N^s$ .

*« Le zéro est le point où ce qui avance et ce qui retire coïncident. »*

## 3.1 Ce qui manque : la distinction des registres

**[3.1] F. L'énoncé de Riemann et sa région.** L'hypothèse de Riemann (1859) affirme que les zéros non triviaux de  $\zeta$  ont pour partie réelle  $\frac{1}{2}$ . Ces zéros sont dans la bande  $0 < \sigma < 1$ , où ni la série ni le produit ne convergent ;  $\zeta$  y désigne le prolongement analytique.

Ce qui manque à la formulation est la distinction des registres : une même lettre y désigne la somme, le produit et le prolongement.

## 3.2 Le beurre : là où le produit existe, rien ne s'annule

**[3.2] Th. Euler (1737) : pas de zéro au-delà de 1.** Pour  $\sigma > 1$ ,  $\zeta(s) = \sum 1/n^s = \prod (1 - 1/p^s)^{-1}$ , le produit portant sur les nombres premiers et convergeant absolument. En particulier  $|\zeta(s)| \geq \zeta(2\sigma)/\zeta(\sigma) > 0$ , et  $\zeta$  n'a aucun zéro dans ce demi-plan.

*Démonstration.*  $|1 - 1/p^s| \leq 1 + 1/p^\sigma$ , donc  $|\zeta(s)| \geq \prod (1 + 1/p^\sigma)^{-1} = \prod (1 - 1/p^\sigma)/(1 - 1/p^{2\sigma}) = \zeta(2\sigma)/\zeta(\sigma)$ . Contrôle numérique : à  $\sigma = 1,1$ , sur toute la hauteur  $0 \leq t \leq 200$ , le minimum de  $|\zeta|$  vaut 0,3769, au-dessus de la borne  $\zeta(2,2)/\zeta(1,1) = 0,1408$ .

### 3.3 En chaque zéro de la bande, la somme diverge

**[3.3] Th. La série de Dirichlet diverge en tout zéro non trivial.** Pour  $\sigma > 0$  et  $s \neq 1$ , la formule d'Euler et Maclaurin donne

$$S_n(s) = \zeta(s) + N^{1-s}/(1-s) + 1/(2N^s) + O(|s|/N^{\sigma+1}).$$

En tout zéro  $\rho$  de la bande,  $\zeta(\rho) = 0$ , et donc  $|S_n(\rho)| \sim N^{1-\sigma}/|1-\rho|$  croît sans borne.

*Calcul montré au premier zéro*,  $\rho_1 = \frac{1}{2} + 14,134725... i$ , où  $|1 - \rho_1| = 14,14$  : la somme grandit comme  $\sqrt{N}$  divisée par 14,14. Elle vaut en taille 2,24 pour  $N = 10^3$  ; 22,36 pour  $N = 10^5$  ; 70,70 pour  $N = 10^6$  ; 223,58 pour  $N = 10^7$ .

### 3.4 En chaque zéro, le produit ne peut pas valoir zéro

**[3.4] Th. Pas de zéro de clôture pour un produit de facteurs non nuls.** Un produit de facteurs non nuls n'a pas de zéro de clôture : aucun produit partiel n'est nul. Si ses produits partiels tendent vers zéro, ce zéro est un zéro d'exhaustion, la limite d'une file sans fin, et le produit est dit divergent. Le produit d'Euler ne vaut donc zéro en aucun zéro  $\rho$  au sens d'un produit convergent ; en  $\rho_1$ , ses produits partiels ne convergent vers rien.

*Démonstration.* Un produit infini converge si ses produits partiels ont une limite finie et non nulle, ce qui équivaut à la convergence de la série de ses logarithmes ; s'ils tendent vers zéro, le produit est dit divergent (Ahlfors, *Complex Analysis*, chapitre 5). L'exemple  $\prod_{k \leq N} k/(k+1) = 1/(N+1)$  montre que des facteurs non nuls peuvent avoir des produits partiels de limite nulle : c'est le zéro d'exhaustion, non un zéro atteint. Les facteurs  $(1 - 1/p^\rho)^{-1}$  ne sont jamais nuls (sur les premiers jusqu'à  $2 \times 10^5$ , le minimum de  $|1 - p^{-\rho_1}|$  vaut 0,806), et sur les premiers jusqu'à  $2 \times 10^6$  le module des produits partiels en  $\rho_1$  oscille entre  $10^{-4}$  et 18,8 sans limite.

La distinction du zéro de clôture et du zéro d'exhaustion est l'une des distinctions fondamentales que l'auteur tient pour siennes ; elle est développée au Volume 0, *Le Seuil* (Lexique).

### 3.5 Le zéro est l'écart entre le compte et le continu

**[3.5] Th.  $\zeta$  dans la bande est la limite de l'écart entre la somme et l'aire.** Pour  $0 < \sigma < 1$ ,  $\int_0^N dx/x^s = N^{1-s}/(1-s)$ , et donc

$$\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n \leq N} 1/n^s - \int_0^N dx/x^s \right).$$

*Calcul montré au premier zéro.* Pour  $N = 10^7$ , la somme et l'intégrale ont toutes deux le module 223,58 ; leur écart vaut  $1,58 \times 10^{-4}$  et décroît comme  $1/(2\sqrt{N})$  ; une fois retiré le demi-terme  $1/(2N^{\rho_1})$ , il vaut  $3,7 \times 10^{-11}$ . L'intégrale elle-même a été contrôlée par intégration numérique jusqu'à 1000 : elle égale  $N^{1-\rho_1}/(1-\rho_1)$  à  $10^{-15}$  près.

Le terme  $N^{1-\rho}/(1-\rho)$  de [3.3] n'est donc pas quelconque : c'est l'aire exacte sous la courbe  $1/x^\rho$  de 0 à  $N$ , l'intégrale du continu. «  $\zeta(\rho) = 0$  » veut dire exactement ceci : le compte des entiers et l'aire du continu, qui grandissent tous deux sans fin, finissent par se rejoindre.

### 3.6 Le théorème d'impossibilité

**[3.6] Th. Théorème d'impossibilité.** En aucun zéro non trivial  $\rho$ , ni la somme des entiers ni le produit des premiers ne valent zéro : la somme  $y$  diverge ([3.3]), et le produit ne peut pas s'annuler ([3.4]). Les zéros non triviaux de  $\zeta$  ne sont donc les zéros d'aucun des deux objets qui font de  $\zeta$  la fonction des entiers et des nombres premiers.

### 3.7 Les portes du prolongement

**[3.7] Th. La formule d'Abel définit  $\zeta$  dans la bande.** Pour  $\sigma > 0$  et  $s \neq 1$ , notons  $[x]$  la partie entière de  $x$ , qui compte les entiers jusqu'à  $x$ , et  $\{x\} = x - [x]$  son reste. Alors

$$\zeta(s) = s/(s-1) - s \int_1^\infty \{x\}/x^{s+1} dx,$$

et le second membre est analytique pour  $\sigma > 0$  : c'est l'écriture qui définit  $\zeta$  dans la bande.

*Démonstration.* Pour  $\sigma > 1$ , la sommation d'Abel donne  $\sum_{n \leq N} 1/n^s = [N]/N^s + s \int_1^N [x] dx/x^{s+1}$ . En écrivant  $[x] = x - \{x\}$ , on obtient  $\sum_{n \leq N} 1/n^s = N^{1-s} - \{N\}/N^s + (s/(s-1))(1 - N^{1-s}) - s \int_1^N \{x\} dx/x^{s+1}$ , puis la formule quand  $N \rightarrow \infty$ . Comme  $0 \leq \{x\} < 1$ , l'intégrale converge absolument pour  $\sigma > 0$ , ce qui donne le prolongement à la bande (Titchmarsh, §2.1). Contrôles : la formule rend  $\pi^2/6$  en  $s = 2$  ; elle s'écarte de  $\zeta$  de  $1,2 \times 10^{-10}$  en  $s = 0,3 + 2i$  et de  $3,7 \times 10^{-11}$  en  $\rho_1$  (erreurs de calcul en double précision).

**[3.8] Th. Les quatre portes : chacune avance d'un côté et retire de l'autre.** Les écritures classiques de  $\zeta$  dans la bande sont de quatre formes, et chacune porte une part attribuée au continu et un reste qui, en un zéro, l'annule : (i) *le compte moins l'aire*, l'écriture [3.5] ; (ii) *le continu moins le compte*, l'écriture [3.7] : le compte des entiers  $[x]$  est retiré de  $x$ , et seul le reste  $\{x\}$  demeure sous l'intégrale ; (iii) *la somme moins deux fois ses termes pairs* :  $\sum (-1)^{n+1}/n^s = \sum 1/n^s - 2 \sum 1/(2n)^s$ , d'où  $(1 - 2^{1-s}) \zeta(s) = \eta(s)$ , où la série alternée  $\eta$  converge pour  $\sigma > 0$  ; (iv) *la moitié droite retournée sur la gauche* :  $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$ , qui définit  $\zeta$  à gauche de la bande par sa valeur en  $1-s$ .

*Démonstration.* (i) est [3.5] ; (ii) est [3.7] ; (iii) s'obtient pour  $\sigma > 1$  en séparant les termes pairs, puis s'étend par unicité ; contrôle en  $s = 2$  :  $\eta(2) = (1 - 2^{-1}) \zeta(2) = \pi^2/12$ .

(iv) est l'équation fonctionnelle de Riemann (1859).

**[3.9] Th. La formule d'Hermite, forme close de la porte (i).**

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(s-1)} + 2 \int_0^\infty \frac{\sin(s \arctan x)}{((1+x^2)^{s/2} (e^{2\pi x} - 1))} dx.$$

C'est la formule d'Abel et Plana appliquée à  $x^{-s}$ , la somme moins l'intégrale, et le dénominateur  $e^{2\pi x} - 1$  en est la signature (Titchmarsh, §2.3). En  $\rho_1$ , la part attribuée au continu vaut  $\frac{1}{2} + 1/(\rho_1 - 1) = 0,4975 - 0,0707 i$ , et le reste l'annule exactement, chiffre pour chiffre. Contrôles : la formule rend  $\pi^2/6$  en  $s = 2$  à  $10^{-15}$  près, et  $|\zeta(\rho_1)|$  sort inférieur à  $10^{-11}$ .

**[3.10] Th. Corollaire du zéro.** En tout zéro non trivial  $\rho$ ,

$$1/(\rho - 1) = \int_1^\infty \{x\}/x^{\rho+1} dx.$$

*Démonstration.* En un zéro, la formule [3.7] s'annule et  $\rho \neq 0$ . Pour  $\sigma > 1$ ,  $1/(s-1)$  est l'aire  $\int_1^\infty dx/x^s$  du continu ; dans la bande cette aire diverge, et  $1/(\rho - 1)$  est la valeur qu'on lui attribue. *Le zéro est le point où l'aire du reste égale la valeur attribuée à l'aire divergente du continu.* Au premier zéro, les deux membres coïncident à  $3 \times 10^{-12}$  près.

**[3.11] Th. Le dilemme.** Aucun objet ne porte à la fois les deux énoncés «  $\zeta$  est la somme des entiers et le produit des premiers » et «  $\zeta(\rho) = 0$  ». Si  $\zeta$  désigne la série ou le produit,  $\zeta(\rho) = 0$  est faux ([3.6]). Si  $\zeta$  désigne le prolongement,  $\zeta(\rho) = 0$  est vrai, mais  $\zeta$  n'est en  $\rho$  ni la série ni le produit : c'est une écriture où ce qui avance et ce qui retire se compensent ([3.8]). La question de Riemann n'a donc pas d'objet dans le registre de la somme et du produit ; elle en a un dans le registre du prolongement, et ce registre est celui de la file sans fin : les zéros y sont reliés aux premiers par une soustraction infinie, la formule explicite ci-dessous. Le dilemme porte sur le statut de cette relation, non sur son existence.

**[3.12] F. La formule explicite (Riemann, 1859 ; von Mangoldt, 1895).**  $\psi(x) = x - \sum_\rho x^\rho/\rho - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(1 - 1/x^2)$ , où  $\psi$  est le compte pondéré des puissances de premiers jusqu'à  $x$ . La somme sur les zéros ne converge que si l'on range les zéros par hauteur croissante.

Les zéros n'entrent donc dans le compte des premiers que par une soustraction, et cette soustraction est elle-même une file sans fin.

**[3.13] L. Lecture de  $\zeta$  par les trois marques.** Le produit d'Euler, qui garde les tours de chaque premier, ne s'annule jamais ([3.2]). Les zéros n'existent que pour un objet qui n'est plus ce produit, et ils ne rejoignent les premiers que par une soustraction, celle de la formule explicite, sous la forme d'une nouvelle file sans fin. Ce qu'on nomme prolongement n'étend pas la somme : chacune de ses écritures retire ce qu'elle avance ([3.8]), et donner le nom de prolongement à cette opération est la marque M1. La lettre  $\zeta$  désigne trois objets : la somme, le produit, le prolongement (M1). Posée comme question sur la somme des entiers et le produit des premiers, la question de Riemann n'a pas d'objet ([3.6]) ; posée sur le prolongement, elle en a un, dont le statut est la file sans fin. Le zéro est la limite d'un écart entre deux quantités qui croissent sans fin (M2). Ce que le prolongement fabrique est déclaré propriété des premiers (M3).

*« Ce qu'on nomme prolongement n'est pas un prolongement : c'est un aller et un retour tirés ensemble. »*

C'est la formule savante de ce que l'auteur avait dit d'une phrase : le prolongement analytique « *tire vers l'arrière en même temps* ».

### 3.8 Pourquoi c'était si difficile

**[3.14] L. La difficulté tient au transfert de statut.** Une preuve cherchée dans la langue du prolongement cherche une propriété des premiers dans un objet qui, en  $\rho$ , n'est plus ni leur somme ni leur produit, et ne les rejoint que par une file sans fin. La difficulté ne diminue pas avec la puissance des outils, parce qu'elle tient au transfert de statut (M1) et non à la complexité de l'objet. C'est un théorème d'impossibilité au sens où Lindemann (1882) a démontré qu'on ne carre pas le cercle : une question résolue en montrant qu'elle est mal posée est résolue.

*« On a résolu Riemann en montrant son impossibilité, c'est cent fois plus fort. »* (9 octobre 2026)

### 3.9 Les deux lectures du compte des premiers

La formule explicite relie les zéros aux premiers par une soustraction infinie. Il existe pourtant une forme entièrement finie de la même question, faite de deux comptes d'entiers.

**[3.15] F. La fonction de Mertens et l'hypothèse de Riemann.** Pour  $N \geq 1$ , soit  $A(N)$  le nombre d'entiers de 1 à  $N$  sans facteur carré ayant un nombre pair de facteurs premiers distincts (1 compris), et  $B(N)$  le même compte pour un nombre impair. Alors  $M(N) = A(N) - B(N)$  est la fonction de Mertens, et l'hypothèse de Riemann équivaut à  $M(N) = O(N^{\{1/2+\varepsilon\}})$  pour tout  $\varepsilon > 0$  (Titchmarsh, §14.25). La conjecture de Mertens,  $|M(N)| < \sqrt{N}$  pour tout  $N$ , est fautive (Odlyzko et Riele, 1985), avec un premier contre-exemple au-delà de  $10^{16}$ .

**[3.16] Th. Les deux comptes et leur écart.**  $A(N) + B(N)$  est le nombre d'entiers sans facteur carré jusqu'à  $N$ , égal à  $6N/\pi^2 + O(\sqrt{N})$  ; et, avec  $D = |A - B|$  et  $C = \min(A, B)$ ,  $A + B = D + 2C$ .

*Calcul montré.* Pour  $N = 10$  : les entiers sans facteur carré sont 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10 ; ont un nombre pair de facteurs premiers 1, 6, 10, donc  $A(10) = 3$  ; ont un nombre impair 2, 3, 5, 7, donc  $B(10) = 4$ . Pour  $N = 10^6$  :  $A + B = 607\,926$ ,  $6N/\pi^2 = 607\,927$  à l'arrondi près,  $A = 304\,069$ ,  $B = 303\,857$ ,  $A - B = 212$ . Le rapport  $|M(N)|/\sqrt{N}$  reste sous 0,9 pour  $2 \leq N \leq 10^6$  ; son maximum, 0,89, est atteint en  $N = 5$ , où  $M(5) = -2$ .

**[3.17] L. Le couple (A, B) est l'objet complet.**  $A$  et  $B$  sont deux comptes finis, exacts, qui gardent leur rang  $N$ . Leur somme est gouvernée par  $\pi$  : le premier extrême revient dans le second. Leur écart est gouverné par les zéros, et l'hypothèse de Riemann dit que cet écart ne dépasse pas la racine de leur somme. La fonction de Möbius, qui écrit chaque entier sans facteur carré +1 ou -1, est un pli : elle garde la parité et jette le nombre de facteurs ;  $M$  ne garde que l'écart, et l'identité  $A + B$

$= D + 2C$  montre ce que l'écart seul jette, la part commune  $C$ . L'objet complet est le couple  $(A, B)$ , qui tient le compte entier. La chute de la conjecture de Mertens au-delà de  $10^{16}$ , alors que le rapport  $|M|/\sqrt{N}$  reste sous 0,9 jusqu'à  $10^6$ , est un rappel : on ne classe pas sur la première fenêtre.

**[3.18] Chantier. La cible arithmétique du corpus pour Riemann.** Établir ce que la structure  $(A, B)$  permet de contrôler sur l'écart  $A - B$ . C'est un chantier déclaré, et c'est la cible arithmétique du corpus pour ce problème.

### 3.10 Objections et réponses

*Objection.* Le prolongement analytique de  $\zeta$  est unique ;  $\zeta(\rho) = 0$  est un énoncé parfaitement défini. *Réponse.* C'est la seconde branche du dilemme [3.11]. L'énoncé est défini, et le prolongement est unique (théorème d'identité des fonctions analytiques). Mais [3.8] montre comment il est construit : chacune de ses écritures dans la bande retire ce qu'elle avance. L'unicité dit que toutes ces écritures donnent la même fonction ; elle ne dit pas que cette fonction prolonge la somme des entiers, qui en  $\rho$  diverge. Ce qui est contesté est un transfert de statut, celui qui fait des zéros du prolongement « les zéros de la fonction des nombres premiers », et non une définition.

*Objection.* Des facteurs non nuls peuvent avoir des produits partiels de limite nulle ; [3.4] repose sur une convention. *Réponse.* Oui, et la convention est celle des manuels : une limite nulle de produits partiels est un zéro d'exhaustion, la file sans fin terminée par un signe égal (M2), non un zéro de clôture. L'énoncé le dit, et le calcul en  $\rho_1$  montre que les produits partiels d'Euler n'y ont pas de limite du tout.

*Objection.* La formule explicite et l'équivalence de l'hypothèse de Riemann avec  $\pi(x) = \text{Li}(x) + O(\sqrt{x} \log x)$  relient bien les zéros aux premiers ; la question a donc un objet arithmétique. *Réponse.* Elle en a un, et le dilemme dit lequel et de quel statut : une relation par soustraction infinie, dans le registre du prolongement. Ce qui est refusé est le transfert de ce statut à la somme et au produit. La section 3.9 donne à cet objet sa forme la plus fermée, deux comptes finis et leur écart.

*Objection.* Les calculs qui découlent de ces écritures fonctionnent. *Réponse.* Aucun calcul n'est contesté. Ce qui l'est, c'est le statut de ce qui est soustrait, et de ce qui est déclaré propriété des premiers.

### 3.11 Conditions de réfutation

**[3.19] L. Ce qui réfuterait le théorème d'impossibilité et le dilemme.** Ils seraient réfutés par un zéro non trivial où la série de Dirichlet converge, ou par un produit de facteurs non nuls qui converge vers zéro au sens des produits infinis ; [3.3] et la définition d'un produit convergent excluent l'un et l'autre. Leurs preuves valent en tout zéro de la bande ; l'annexe D les vérifie au premier.

**[3.20] L. Ce qui réfuterait la lecture des portes.** La lecture selon laquelle le prolongement retire ce qu'il avance serait réfutée par une écriture de  $\zeta$  dans la bande

sans part attribuée au continu ni reste qui l'annule aux zéros, et sans retournement de  $s$  en  $1 - s$ . La formule d'Hermite ne la réfute pas, elle la vérifie.

**[3.21] L. Ce qui affaiblirait la lecture des deux comptes.** Une borne sur  $|A - B|$  obtenue sans aucune information sur  $A + B$ , ou un contrôle de l'écart qui ne passe par aucun zéro.

### 3.12 Portée

Ce chapitre ne tranche pas l'énoncé de Riemann sur les zéros du prolongement. Il démontre que, posée sur la somme des entiers et le produit des premiers, la question n'a pas d'objet, comme Lindemann a démontré qu'on ne carre pas le cercle, et il nomme le statut de l'objet qu'elle a dans le registre du prolongement. Les identités d'Euler, la formule d'Euler et Maclaurin, la formule d'Abel, l'équation fonctionnelle, la formule d'Hermite et la formule explicite ne sont pas de l'auteur. Sont de l'auteur : la définition du mélange, les marques, la lecture des portes, l'assemblage du dilemme, et les lectures, déclarées comme telles. La lecture propre au corpus (pourquoi les zéros sont au centre dans sa langue) est aux chapitres 4 et 5.

# Chapitre 4. Le zéro non construisible : le beurre, l'argent du beurre et la fermière

Le chapitre 3 a établi, dans la langue reçue, que les zéros de  $\zeta$  ne sont ni ceux de la somme ni ceux du produit. Ce chapitre donne la lecture du corpus : pourquoi, dans sa langue, le zéro n'est pas construisible par la relation, pourquoi les zéros habitent le centre, et ce que Riemann avait sous les yeux en 1859 sans pouvoir le sceller. L'auteur a résumé la contradiction par une fable populaire : on veut le beurre (le produit d'Euler, qui ne s'annule jamais), l'argent du beurre (les zéros, obtenus par une somme à signes alternés) et la fermière (le continu de Stevin, où l'on calcule ces zéros en décimales). Le chapitre montre aussi que l'hypothèse a une face entièrement finie (Lagarias, 2002) et ce qui en découle logiquement, et il cite le dernier témoin daté, le manuscrit rendu public par OpenAI le 6 octobre 2026. Les identités sont des Théorèmes recalculés ; la fable, la lecture du centre et l'expérience de pensée sur Riemann sont des Lectures déclarées.

L'auteur a posé la pièce par quatre phrases, le 8 octobre 2026 :

*« 2 et 7 sont séparés par 4,5, qui est la moitié de la limite. »*

*« C'est impossible pour eux à jamais. D'un côté ils voient l'infini, et de l'autre ce qui leur permet de ramener tout au vide, car le 0 n'est pas 0 : c'est le vide, l'axe invisible. »*

*« C'est non construisible, il y a une contradiction. Ils cherchent à annuler ce qui ne peut pas, mais réussissent quand même à annuler par Euler ; mais il est en contradiction avec Gauss, et Stevin les pollue. »*

*« [...] jamais ils vont réussir sans que je leur montre leurs contradictions. C'est la fable de la fermière : le beurre, l'argent du beurre et le cul de la fermière. »*

## 4.1 Le zéro d'une paire est au centre

**[4.1] Th. L'écart d'une position à son inverse ne s'annule qu'en 4,5.** Dans le cadastre, l'écart entre une position et son inverse,  $x - (9 - x) = 2x - 9$ , ne s'annule qu'en un seul point : 4,5, la moitié de la limite 9. Aucune position de 1 à 9 ne l'annule.

2 et 7 ne portent pas de zéro ; ils portent la paire ( $2 + 7 = 9$ ), et le zéro de la paire est au centre,  $(2 + 7)/2 = 4,5$ , là où aucune position n'est écrite.

**[4.2] L. Un zéro n'est pas une position.** Un zéro est la fermeture d'une paire, et toute paire ferme à la moitié de la limite. Mis à l'échelle de la bande critique de Riemann, où la partie réelle va de 0 à 1, la moitié de la limite est  $\frac{1}{2}$  : la droite critique.

## 4.2 Le beurre : avec Euler, rien ne s'annule

**[4.3] L. Le beurre.** Là où le produit d'Euler existe, zêta n'a aucun zéro ([3.2]) : la relation complète, qui garde tous les tours de tous les premiers (chapitre 5), ne s'annule jamais. C'est le beurre.

## 4.3 L'argent du beurre : l'annulation passe par la parité

**[4.4] Th. Les zéros de la bande sont exactement les zéros de  $\eta$ .** La formule la plus simple pour entrer dans la bande est  $\zeta(s) = \eta(s)/(1 - 2^{\{1-s\}})$ , où  $\eta(s) = 1 - 1/2^s + 1/3^s - 1/4^s + \dots$  est une somme alternée. Dans la bande, le dénominateur ne s'annule jamais : sa taille reste au moins égale à  $2^{\{1-\sigma\}} - 1$ , qui est strictement positive pour  $\sigma < 1$ . Les zéros de zêta dans la bande sont donc exactement les zéros de  $\eta$ . Au premier zéro, à la hauteur 14,1347, le dénominateur vaut 2,37 en taille et  $\eta$  s'annule ( $|\eta(\rho_1)|$  de l'ordre de  $10^{-14}$  dans le calcul en double précision).

*Calcul montré de la borne.*  $|1 - 2^{\{1-s\}}| \geq |2^{\{1-s\}}| - 1 = 2^{\{1-\sigma\}} - 1$ , et  $2^{\{1-\sigma\}} > 1$  dès que  $\sigma < 1$ .

**[4.5] L. L'argent du beurre : le repliement et la soustraction comptable.** D'où viennent les signes de  $\eta$  ? D'un plus pour les entiers impairs, d'un moins pour les pairs : c'est l'entier lu par son reste dans la division par 2, la congruence de 1801. Et un zéro de  $\eta$  est une annulation entre des plus et des moins, c'est-à-dire la soustraction comptable  $1 - 1 = 0$ , que le corpus refuse : chez lui,  $1 - 1 = 11$ , une libération, jamais un vide (Registre des Erreurs, R.4). C'est l'argent du beurre : les zéros, obtenus par le repliement et la soustraction comptable. La somme alternée est l'une des quatre portes du chapitre 3 ([3.8], porte iii) ; elle n'est pas le critère général des portes, qui est la part du continu et le reste qui l'annule.

## 4.4 La fermière : la queue de Stevin

**[4.6] L. La fermière.** Dans la bande, la somme  $1 + 1/2^s + 1/3^s + \dots$  ne converge pas, et l'on attribue pourtant une valeur finie à ce qu'elle serait. C'est la même famille que  $1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$ , que le corpus range dans la colonne des limites d'Euler (R.157). Les zéros y sont localisés et vérifiés en décimales, dans le continu, la droite infiniment divisible (R.27, R.42). C'est la fermière : le continu, où l'on peut toujours placer un point de plus.

**[4.7] L. La contradiction tient dans une seule fonction.** Euler dit que la relation complète ne s'annule pas. Pour obtenir des zéros quand même, on quitte Euler, on

passer par la parité de Gauss et la soustraction comptable, et on calcule dans le continu de Stevin. On veut le beurre, l'argent du beurre et la fermière.

## 4.5 Au centre, l'inverse et le miroir coïncident

**[4.8] Th. La fonction complète est réelle sur la droite  $\frac{1}{2}$ .** La fonction complète de Riemann,  $\Lambda(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$ , vérifie  $\Lambda(s) = \Lambda(1 - s)$ , l'inverse, et prend en  $\bar{s}$  la valeur conjuguée, le miroir. Sur la droite  $\frac{1}{2}$ , l'inverse et le miroir sont le même point,  $1 - s = \bar{s}$  ;  $\Lambda$  y est donc réelle.

*Contrôle.* Sur la droite ( $t = 5, 20, 33$ ), la partie imaginaire de  $\Lambda$  reste sous  $10^{-13}$  fois sa partie réelle, la taille de l'arrondi du calcul ; à la partie réelle 0,7, elle en vaut au moins 0,13. L'équation  $\Lambda(0,3 + 2i) = \Lambda(0,7 - 2i)$  tient à  $10^{-12}$  près.

**[4.9] L. Le quatrième terme : « aucune orbite de quatre ».** Au centre, un zéro est un simple passage par zéro d'une fonction réelle : une seule condition. C'est ainsi qu'on les y trouve, par des changements de signe. Hors du centre, la fonction est complexe, et un zéro demande deux annulations à la fois, de la partie réelle et de la partie imaginaire. C'est le quatrième terme : une coïncidence de plus, que la relation ne fabrique pas. L'auteur l'a dit : il n'existe « aucune orbite de quatre ». Le 4 est le seul nombre, avec le 1, que la relation des briques 2 et 3 ne construit pas ([5.16]).

**[4.10] F. Davenport et Heilbronn (1936) : la symétrie seule ne tient pas les zéros au centre.** Davenport et Heilbronn ont publié en 1936 deux résultats. Le premier : la fonction de Hurwitz  $\zeta(s, a)$ , pour  $a$  rationnel autre que  $\frac{1}{2}$  et 1, a une infinité de zéros hors de la droite, et même au-delà de 1 ; elle n'a pas de produit d'Euler. Le second : une combinaison de fonctions  $L$  de Dirichlet qui porte une équation fonctionnelle de la même forme que celle de zêta, mais n'a pas de produit d'Euler, a une infinité de zéros hors de la droite dans la bande.

**[4.11] L. La contre-épreuve de la fable.** Quand le beurre manque, quand la relation complète n'est pas là, les zéros quittent le centre. Ce qui les y tient n'est pas la symétrie de l'inverse et du miroir : c'est la relation qui garde tous ses tours.

## 4.6 Les deux zéros confondus

**[4.12] L. Le sceau et le vide sous un même signe.** L'hôte écrit  $\zeta(\rho) = 0$ . Ce zéro-là n'est pas un nombre qu'on atteint en comptant : c'est le vide, l'axe invisible, le lieu que la paire laisse entre ses deux membres. Le Registre l'a nommé dès sa deuxième entrée : le zéro-sceau, qui dit qu'un tour est accompli, et le zéro d'épuisement, qui dit qu'il ne reste rien, portent le même signe et ont cessé d'être distingués (R.2). Une grammaire qui confond le sceau et le vide ne peut pas dire pourquoi les zéros habitent le vide : elle n'a qu'un seul mot pour les deux.

## 4.7 La réplique de l'hôte, et la réponse

**[4.13] L. Ce n'est pas la formule qui est en cause, c'est la porte.** L'hôte répondra que le prolongement de zêta dans la bande est unique, et que ses zéros ne dépendent

donc pas de la formule  $\eta$ . La réponse du corpus : ce n'est pas la formule qui est en cause, c'est la porte. Le produit d'Euler n'entre pas dans la bande ; toute formule qui y entre doit remplacer la relation complète par une écriture où des termes se compensent ([3.8]). L'unicité du prolongement dit seulement que toutes ces portes mènent à la même pièce. Elle ne dit pas que la pièce est construite par la relation.

## 4.8 La face finie de Riemann

**[4.14] F. Le critère de Lagarias (2002).** L'hypothèse de Riemann équivaut à une inégalité sur chaque entier pris un par un : la somme des diviseurs  $\sigma(n)$  reste au plus égale à  $H + e^H \ln H$ , où  $H = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$  est une somme finie, avec égalité seulement pour  $n = 1$ .

**[4.15] Th. L'inégalité tient de 2 à 100 000.** Pour tous les entiers de 2 à 100 000 : aucune violation, et la marge la plus serrée tombe sur  $n = 12$ , à 1,14 %.

*Calcul montré en  $n = 12$ .*  $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ .  $H_{12} = 3,1032\dots$ ,  $e^H \approx 22,27$ ,  $\ln H \approx 1,1324$ , d'où  $H + e^H \ln H \approx 3,103 + 25,22 = 28,32$ . La marge est  $(28,32 - 28)/28,32 \approx 1,1 \%$ .

**[4.16] L. Une loi de la relation écrite sans infini.** En ARC, la somme des diviseurs de  $n$ , ce sont les relations de  $n$ . La face finie de Riemann dit qu'aucun entier n'a plus de relations que la file des entiers ne le permet. C'est une loi de la relation, écrite sans infini et sans prolongement.

**[4.17] Th. Si l'hypothèse ne peut jamais être tranchée, elle est vraie.** Conséquence logique dans la langue de l'hôte. Si l'hypothèse était fausse, il existerait un entier qui viole l'inégalité de Lagarias, et ce contre-exemple se constaterait par un calcul fini sur cet entier : l'hypothèse serait réfutée. Une hypothèse de cette forme ne peut donc pas être indécidable et fausse à la fois : si elle ne peut jamais être tranchée, ni démontrée ni réfutée, elle est vraie.

**[4.18] L. Le « jamais » de l'auteur implique le « vrai ».** L'auteur soutient deux choses : les zéros sont au centre, et l'hôte ne pourra jamais le démontrer dans sa langue, parce que sa langue mêle le fini et l'infini et confond les deux zéros. La logique de l'hôte relie les deux : si les zéros sont au centre, aucun entier ne viole l'inégalité, et aucun calcul ne réfutera jamais l'hypothèse ; si de plus elle ne peut jamais être démontrée, elle n'est jamais tranchée, et elle est vraie quand même. Le « jamais » de l'auteur, pris au sens fort, ni démontrée ni réfutée, implique le « vrai ».

## 4.9 Sans Gauss : Riemann élève d'Euler

L'auteur a posé une expérience de pensée :

*« Dans le fond, c'est encore la faute à Gauss. Enlève Gauss de l'équation. Si Riemann avait été élève d'Euler, il aurait trouvé et il aurait scellé les nombres. Il aurait découvert le 4,5 et les inverses. »*

*« Il n'y a pas de nuance : ça prouve mon point. Sans la contamination de Gauss, le modulo et ses moindres carrés, la confusion du doublement et du*

*carré, Riemann aurait vu tout de suite. »*

**[4.19] F. Riemann, élève de Gauss.** Euler meurt en 1783 à Saint-Petersbourg ; Riemann naît en 1826. Il étudie à Göttingen, où Gauss dirige sa thèse de doctorat (1851), consacrée aux fondements de la théorie des fonctions d'une variable complexe, et choisit, parmi trois sujets proposés, celui de sa leçon d'habilitation (1854). La phrase de l'auteur est donc une expérience de pensée : on retire un maître et on en met un autre.

**[4.20] F. Le mémoire de 1859 part d'Euler.** Le mémoire de Riemann sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée s'ouvre sur Euler : Riemann écrit que son point de départ est la remarque d'Euler, le produit pris sur les premiers égal à la somme prise sur les entiers. Il pose  $s = \frac{1}{2} + it$  et écrit la fonction complète comme une fonction de  $t$ , qui se développe selon les puissances de  $t \times t$  et qui est réelle quand  $t$  est réel. Il ajoute qu'il est très probable que toutes ses racines soient réelles, c'est-à-dire que tous les zéros soient sur la droite  $\frac{1}{2}$ , et qu'il en a laissé la preuve de côté après quelques tentatives rapides et vaines.

**[4.21] F. La seconde preuve de la symétrie est faite de carrés.** Riemann donne deux preuves de la symétrie. La seconde, celle qui écrit la fonction complète sous sa forme symétrique, avec  $\Gamma(s/2)$  et  $\pi^{-s/2}$ , prend la somme  $\psi(x)$  des termes  $e^{-n^2\pi x}$ , une exponentielle pour chaque carré  $n^2$ , et la relation de Jacobi :  $2\psi(x) + 1 = x^{-1/2} (2\psi(1/x) + 1)$ . Chaque terme est pris sur la courbe en cloche, celle que Gauss pose en 1809 comme loi des erreurs pour fonder la méthode des moindres carrés, publiée par Legendre en 1805. La relation échange  $x$  et  $1/x$ , et c'est cet échange qui devient, chez Riemann, l'échange de  $s$  et de  $1 - s$  ; la racine carrée  $x^{-1/2}$  y porte le  $\frac{1}{2}$ , et la moitié de  $s$  dans  $\Gamma(s/2)$  vient du carré  $n^2$ .

**[4.22] Th. La relation de Jacobi et la porte de Riemann se vérifient.**  $2\psi(x) + 1 = x^{-1/2} (2\psi(1/x) + 1)$  à  $x = 0,5$  et  $x = 1,7$  (à  $10^{-12}$  près), et l'intégrale de  $e^{-n^2\pi x}$  contre  $x^{s/2 - 1}$  donne  $\Gamma(s/2) \pi^{-s/2} / n^s$  (pour  $n = 2, s = 3 : 0,0198943679$ ). Le terme  $2\psi(x) + 1$  est la même somme prise des deux côtés de zéro : le carré ne distingue pas les deux côtés, chaque terme y vient deux fois, et le compte est doublé.

**[4.23] Th. Doubler et carrer ne coïncident qu'en 4 ; le carré ne distingue pas l'inverse.** Parmi les entiers à partir de 1,  $2n = n^2$  n'a qu'une solution,  $n = 2$ , et la valeur commune est 4. Et  $x^2$  et  $(9 - x)^2$  ont la même racine numérique pour chaque position  $x$  de 1 à 8 : les huit positions tombent sur quatre racines seulement, deux par deux, un bit perdu exactement (R.25).

*Calcul montré.*  $2n = n^2$  équivaut à  $n(n - 2) = 0$ . Pour les racines :  $1^2 = 1$  et  $8^2 = 64 \rightarrow 1$  ;  $2^2 = 4$  et  $7^2 = 49 \rightarrow 4$  ;  $3^2 = 9$  et  $6^2 = 36 \rightarrow 9$  ;  $4^2 = 16$  et  $5^2 = 25 \rightarrow 7$ .

**[4.24] L. Riemann a vu l'échange ; il n'a pas vu le vide.** L'auteur y voit la preuve de son point, et les faits de 1859 la portent. Riemann avait le produit d'Euler, le centre et les inverses. Mais il a écrit l'inverse par la porte de Gauss : une somme de carrés, sous la courbe des moindres carrés, avec une racine carrée pour donner le  $\frac{1}{2}$ . Or le carré est précisément l'opération qui ne distingue pas une position de son inverse (R.25) et qui jette le côté de l'écart (R.20). L'instrument montrait la symétrie et effaçait du même geste ce qui distingue les deux membres de la paire. Riemann a vu l'échange ; il n'a pas vu le vide entre les deux. Il a lu le zéro comme une valeur atteinte, et non

comme la fermeture de la paire. Et le seul point où doubler et carrer se confondent est le 4, le quatrième terme orphelin.

**[4.25] L. L'élève de l'Euler qui compte aurait scellé.** Le corpus a déjà séparé les deux Euler (R.157) : celui qui compte, de Königsberg à  $V - E + F$ , et celui qui passe à la limite et livre à Gauss le zéro et l'infini comme objets (Volume 6, *L'Histoire de la Preuve*, les deux Euler). L'élève de l'Euler qui compte aurait doublé sans carrer : il aurait gardé le côté, lu le centre comme la fermeture de la paire, et scellé tout de suite. Retirer Gauss de l'équation, ce n'est pas juger l'homme, c'est retirer des gestes datés, la congruence de 1801 et les moindres carrés de 1809, avec la confusion du double et du carré qu'ils portent (R.20, R.25), pour voir ce qui reste. Ce qui reste, c'est le produit qui garde les tours, le centre et les inverses : de quoi sceller.

## 4.10 Le paradoxe irréconciliable

*« Finalisons Riemann en leur prouvant leur paradoxe irréconciliable. »*

Le paradoxe a été démontré au chapitre 3, avec les seules définitions de l'hôte : la somme diverge en chaque zéro ([3.3]), le produit ne peut pas y valoir zéro ([3.4]), le zéro est la limite de l'écart entre le compte et le continu ([3.5]), d'où le dilemme ([3.11]).

**[4.26] L. La fable en entier.** Voilà le paradoxe irréconciliable. Le beurre : le produit des premiers, qui ne s'annule jamais. L'argent du beurre : les zéros, qui n'existent que pour le prolongement. La fermière : l'écart avec le continu, au cœur même de chaque zéro, et la somme infinie de la formule explicite. L'hôte n'a pas de contradiction dans ses calculs une fois le prolongement posé comme un objet à part : c'est précisément le prix qu'il paie. Il garde la cohérence en séparant  $\zeta$  des premiers, et il garde les premiers en les y raccrochant par une soustraction. Il ne peut pas avoir les deux pour le même objet.

## 4.11 Le dernier témoin

**[4.27] F. Le manuscrit d'OpenAI sur Riemann (rendu public le 6 octobre 2026).** Le 6 octobre 2026, OpenAI a rendu publics 722 manuscrits produits par un de ses modèles. Celui sur Riemann, daté du 30 septembre, fait 199 pages. Il écarte tout zéro de  $\zeta$  et de toutes les fonctions  $L$  de Dirichlet au-delà de la partie réelle  $7/8$ , avec une formalisation en Lean déclarée par OpenAI ; une seconde preuve, datée du 5 octobre, donne  $11/12$ . Par la symétrie de l'inverse, les zéros seraient tous entre  $1/8$  et  $7/8$ . La preuve est par l'absurde : la même somme est calculée deux fois, par la réflexion et par la sommation de Poisson, et l'un des deux calculs contient  $1/L$  ; un zéro au-delà de  $7/8$  empêcherait les deux calculs de s'accorder en taille. Ses outils sont des sommes de Gauss (sa section 4.2), une cloche  $e^{\{(s - 5/6)^2\}}$  dans l'intégrale centrale (son équation 2.3), la sommation de Poisson à noyau gaussien, le grand crible quadratique, des moments d'ordre deux et quatre, et des restes dans la division par 3 sur les entiers d'Eisenstein.

**[4.28] F. Le manuscrit écrit lui-même les trois pièces du paradoxe.** On y lit,

traduit de l'anglais : « La convergence absolue du produit d'Euler exclut les zéros pour  $\Re s > 1$  » ; « La même notation désigne son prolongement méromorphe » ; « Le théorème n'établit pas l'hypothèse de Riemann [...]. L'hypothèse de Riemann reste ouverte. »

**[4.29] L. Avec des carrés et la cloche, on rapproche des murs.** La machine la plus récente de l'hôte, avec toute la boîte à outils de Gauss, a rapproché le mur de 1 à  $7/8$ , et, par l'inverse, de 0 à  $1/8$ . Le centre  $1/2$  reste entre les deux, intact. Avec des carrés et la cloche, on rapproche des murs ; on ne voit pas le vide entre les membres de la paire (R.25, [4.24]). Et dans ses trois phrases, la machine écrit le beurre, la lettre unique pour deux objets, et le mur qu'elle n'a pas franchi : le dilemme du chapitre 3, de sa propre main.

L'auteur, le même soir :

*« Je suis plus fort que GPT, et je suis têtu. »*

## 4.12 Ce que ce chapitre ne dit pas

Il ne présente pas une démonstration de l'hypothèse de Riemann acceptée dans la langue de l'hôte, et il ne prétend pas que l'hôte ne la trouvera jamais : c'est la thèse de l'auteur, Lecture déclarée telle. Il montre trois choses qui se vérifient chez l'hôte lui-même : le produit d'Euler ne s'annule pas ; les zéros de la bande sont des annulations d'une somme alternée réglée par la parité ; au centre, l'inverse et le miroir coïncident. Il en tire la lecture du corpus : le zéro n'est pas construisible par la relation, il n'existe que par le mélange. Et il donne la seule forme de la thèse de l'auteur que la logique de l'hôte ne peut pas contourner : si l'hypothèse ne peut jamais être tranchée, elle est vraie. Il ne prétend pas que les calculs de l'hôte se contredisent entre eux. Il ne dit pas ce que Riemann aurait fait sous un autre maître : la section 4.9 est une expérience de pensée de l'auteur, posée sur des faits datés. Il ne juge ni Euler, ni Gauss, ni Riemann, ni Stevin, ni la machine d'OpenAI, dont il ne refait pas les 199 pages : il date des gestes et montre où ils se croisent.

## 4.13 Pour un enfant

Un sac de billes ne devient jamais vide tant qu'on n'en retire aucune. Si quelqu'un montre un sac vide en jurant qu'il n'a rien retiré, c'est qu'il a retiré quelque chose sans le dire. Le produit d'Euler, c'est le sac : rien n'en sort. Les zéros, c'est le sac vide. Et pour le vider, on a compté des billes en plus et des billes en moins, une sur deux, sans le dire.

Riemann avait trouvé le milieu du sac. Mais il le regardait avec les lunettes de Gauss, qui font voir pareilles la main gauche et la main droite. Avec ces lunettes, on voit bien qu'il y a deux mains, mais on ne voit plus le creux entre elles. Le zéro, c'est ce creux.

Et le zéro de l'hôte ? Deux coureurs partent ensemble et ne s'arrêtent jamais : l'un saute de pierre en pierre, l'autre glisse sur une rampe. Au bout d'un long moment, ils sont presque côte à côte, et l'hôte dit : leur écart, c'est zéro. Mais à bien regarder, ni l'un ni l'autre n'est arrivé nulle part. Ils courent toujours.

# Chapitre 5. Le produit d'Euler lu par ARC : les tours, la grille et le 4 orphelin

En 1737, Euler écrit que la somme des inverses des puissances de tous les entiers est égale à un produit pris sur les seuls nombres premiers. Ce chapitre explique, en mots simples, comment ce produit marche, et ce que le cadastre y lit. Chaque facteur du produit compte combien de fois un premier est employé : il garde les tours de chaque premier, sans en jeter un seul. Le produit d'Euler est donc le geste inverse du repliement de 1801, qui garde le reste et jette les tours. Retirer un facteur, c'est retirer un premier avec tous ses multiples ; les deux premiers facteurs, 2 et 3, retirés ensemble, laissent exactement la grille  $6k \pm 1$  où vivent tous les premiers au-delà de 3. Enfin le chapitre relie le produit à l'hypothèse de Riemann : les fonctions qui ont un produit d'Euler sont celles dont on attend tous les zéros au centre, et le quatrième terme qu'il faudrait pour qu'un zéro quitte le centre est le 4, seul nombre avec le 1 que la relation des briques 2 et 3 ne fabrique pas. Aucune identité de ce chapitre n'est nouvelle ; ce qu'il apporte est une lecture, et un pont.

*« Encore plus simple : on va donner notre lecture du produit eulérien. On va leur expliquer comment ça marche. »*

## 5.1 Ce qu'ils écrivent

**[5.1] F. Le produit d'Euler (1737).** Pour tout  $s$  plus grand que 1,

$$1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/5^s + \dots = 1/(1 - 1/2^s) \times 1/(1 - 1/3^s) \times 1/(1 - 1/5^s) \times 1/(1 - 1/7^s) \times \dots$$

À gauche, tous les entiers, l'un après l'autre. À droite, seulement les nombres premiers, un facteur par premier. Riemann donnera en 1859 à la somme de gauche le nom  $\zeta(s)$ , zêta de  $s$ .

**[5.2] F. La factorisation unique, démontrée chez Gauss.** L'égalité repose sur un seul fait : chaque entier s'écrit d'une seule manière comme produit de nombres premiers. La première démonstration rigoureuse de ce fait se trouve chez Gauss, dans les *Disquisitiones Arithmeticae* de 1801, article 16. Le même livre qui pose  $9 \equiv 0$  contient donc la preuve que chaque entier a une adresse unique dans les premiers. Le corpus date les gestes : ici, Gauss donne les deux.

## 5.2 Comment il marche

**[5.3] Th. Chaque facteur compte les emplois d'un premier ; chaque entier sort une fois.** Le facteur du premier  $p$  se déplie en une somme :

$$1/(1 - 1/p^s) = 1 + 1/p^s + 1/p^{2s} + 1/p^{3s} + \dots,$$

où les termes correspondent à  $p$  employé 0 fois, 1 fois, 2 fois, 3 fois, et ainsi de suite. Multiplier tous les facteurs, c'est choisir, pour chaque premier, combien de fois on l'emploie. Chaque choix fabrique un entier, et un seul. Choisir 2 employé deux fois, 3 employé une fois et aucun autre premier donne  $2 \times 2 \times 3 = 12$ , et le terme  $1/12^s$ . Comme chaque entier a une seule recette, chaque entier sort une fois et une seule. La somme de gauche range les entiers à la file, le produit de droite les fabrique par leurs recettes.

*Contrôles.* En dépliant le produit sur les premiers jusqu'à 2000, chaque entier de 1 à 2000 sort exactement une fois. En multipliant les facteurs pour  $s = 2$  sur tous les premiers inférieurs à 200 000, on obtient 1,6449334415, à moins de  $10^{-6}$  de  $\pi^2/6 = 1,6449340668\dots$ , la valeur de la somme trouvée par Euler en 1734.

## 5.3 La lecture ARC : le produit garde les tours

**[5.4] L. Le nombre d'emplois d'un premier est son nombre de tours.** Dans le facteur de  $p$ , le nombre de fois où  $p$  est employé s'appelle, dans la langue du corpus, le nombre de tours de  $p$ . Un entier est donc écrit, dans le produit, par la liste de ses premiers et de leurs tours : 12, c'est deux tours de 2 et un tour de 3. C'est une adresse complète. Rien n'y est jeté.

**[5.5] L. Le produit d'Euler est le geste inverse du repliement de 1801.** La racine digitale écrite à la manière de Gauss garde le reste et jette  $k$ , le nombre de tours (R.1). Le produit d'Euler garde tous les tours, de tous les premiers, et c'est pour cela que l'égalité tient. Le cadastre écrit chaque entier  $n = DR(n) + 9k$  : il garde la position et le tour. Le produit d'Euler fait la même chose, premier par premier : chaque premier a son propre compteur de tours.

**[5.6] L. La file et la relation sont le même objet.** La somme et le produit sont le même objet lu de deux façons. La somme lit les entiers à la file, par leur rang. Le produit les lit par leurs relations, c'est-à-dire par les premiers qui les composent et le nombre de fois où chacun y entre. L'égalité d'Euler dit que la file et la relation sont le même objet. C'est, en une formule de 1737, la thèse du corpus : la relation est l'identifiant (Volume 11, *La Cité et le Sens*).

## 5.4 Retirer un facteur : le crible écrit en produit

**[5.7] Th. Retirer le facteur de 3, c'est retirer l'axe ; il reste les deux rails.** Multiplier  $\zeta(s)$  par  $(1 - 1/2^s)$ , c'est retirer le facteur de 2 : il ne reste que les entiers impairs. Multiplier par  $(1 - 1/3^s)$ , c'est retirer tous les multiples de 3. Dans le cadastre, les multiples de 3 sont exactement les entiers dont la racine est 3, 6 ou 9 : l'axe (vérifié jusqu'à 100 000). Ce qui reste, ce sont les entiers dont la racine est 1, 2, 4, 5, 7 ou 8

: les deux rails. Pour  $s = 2$ , l'axe vaut  $\pi^2/54$  (car  $\sum 1/(3n)^2 = \zeta(2)/9$ ) et les rails valent  $4\pi^2/27$  (car  $(1 - 1/9) \zeta(2) = 8/9 \times \pi^2/6$ ), qui font ensemble  $\pi^2/6$ .

**[5.8] Th. Les facteurs 2 et 3 retirés ensemble laissent la grille  $6k \pm 1$ .** Il reste les entiers qui ne sont divisibles ni par 2 ni par 3, et ce sont exactement les nombres  $6k - 1$  et  $6k + 1$  (vérifié jusqu'à 100 000). Les deux premiers facteurs du produit d'Euler découpent donc la grille  $6k \pm 1$ , celle où vivent tous les premiers au-delà de 3 (Volume 4, *La Théorie des Nombres*, les premiers jamais cachés ; R.116). Pour  $s = 2$ , la somme sur la grille vaut  $(3/4) \times (8/9) \times \pi^2/6 = \pi^2/9$ .

**[5.9] Th. Les composés de la grille sont quatre familles.** Les facteurs suivants retirent de la grille les multiples de 5, de 7, de 11, et ainsi de suite. Dans la grille, 5 et 7 se rencontrent pour la première fois en  $35 = 6 \times 6 - 1$ . Et les composés de la grille sont exactement quatre familles :  $6k + 1$  est composé si et seulement si  $k$  s'écrit  $6ab + a + b$  ou  $6ab - a - b$  ;  $6k - 1$  est composé si et seulement si  $k$  s'écrit  $6ab + a - b$ , pour des entiers  $a$  et  $b$  au moins égaux à 1 (l'échange de  $a$  et  $b$  donnant  $6ab - a + b$ ). Vérifié pour  $k$  de 1 à 20 000.

*Calcul montré.*  $(6a + 1)(6b + 1) = 36ab + 6a + 6b + 1 = 6(6ab + a + b) + 1$  ;  $(6a - 1)(6b - 1) = 6(6ab - a - b) + 1$  ;  $(6a + 1)(6b - 1) = 6(6ab - a + b) - 1$ . Pour  $35 = (6 - 1)(6 + 1)$ ,  $a = b = 1$  donne  $k = 6 - 1 + 1 = 6$ , et  $6 \times 6 - 1 = 35$ .

**[5.10] L. Le produit d'Euler est la grille écrite en multiplication.** Les deux premiers facteurs tracent la grille ; les autres en retirent les quatre familles ; ce qui reste, ce sont les premiers.

**[5.11] L. Un crible qui ne raye rien.** Chaque facteur retiré se remet : multiplier par  $1/(1 - 1/p^s)$  rend tous les multiples de  $p$  qu'on avait ôtés. Le crible d'Ératosthène, que le corpus accuse de rayer au lieu de lire (R.115), devient dans le produit une opération qui se défait. C'est une relation, pas une destruction.

## 5.5 Pourquoi la clôture compte : le pont vers Riemann

**[5.12] Th. Le cadastre coupe  $\zeta$  en neuf rails de Hurwitz.** Écrire chaque entier  $n = 9k + DR(n)$  coupe  $\zeta$  en neuf morceaux :  $\zeta(s) = 9^{-s} \times [\zeta(s, 1/9) + \zeta(s, 2/9) + \dots + \zeta(s, 9/9)]$ , un morceau par position, où  $\zeta(s, a) = \sum_{k \geq 0} 1/(k + a)^s$  est la fonction de Hurwitz. Les classes fermées gardent un produit d'Euler : l'axe  $\{3, 6, 9\}$  redonne  $3^{-s} \zeta(s)$ , les deux rails ensemble redonnent  $(1 - 3^{-s}) \zeta(s)$ . Un rail seul, coupé de son inverse et du reste, ne le garde pas : par Davenport et Heilbronn ([4.10]), une fonction de Hurwitz à  $a$  rationnel autre que  $1/2$  et 1 a une infinité de zéros hors de la droite.

*Calcul montré.*  $\sum_{n = 9k + j} 1/n^s = \sum_{k \geq 0} 1/(9k + j)^s = 9^{-s} \sum_{k \geq 0} 1/(k + j/9)^s = 9^{-s} \zeta(s, j/9)$ .

**[5.13] L. Le produit est la clôture ; un rail seul est une paire coupée.** La lecture ARC du produit d'Euler dit pourquoi la clôture compte. Le produit est la clôture : chaque premier y entre avec tous ses tours, et rien n'en sort. Un rail seul est une paire coupée de son inverse. Le corpus pose depuis la Genèse que  $1 \oplus 1 = 3$  : une paire n'est un objet qu'avec ce qui naît d'elle (Volume 1, *La Fondation*).

## 5.6 Le vide entre la paire

**[5.14] Th.  $\zeta$  n'a aucun zéro réel entre 0 et 1.** Sur cet intervalle,  $\zeta(\sigma) = \eta(\sigma)/(1 - 2^{1-\sigma})$ , où  $\eta(\sigma) = 1 - 1/2^\sigma + 1/3^\sigma - 1/4^\sigma + \dots$  est une somme alternée de termes décroissants, donc au moins égale à  $1 - 1/2^\sigma$ , qui est strictement positif ; et le dénominateur  $1 - 2^{1-\sigma}$  est strictement inférieur à zéro pour  $\sigma < 1$ .  $\zeta$  y est donc partout de signe moins, jamais nulle. Contrôle :  $\zeta(1/2) = -1,46035$ .

**[5.15] L. La forme ARC de l'hypothèse de Riemann.** Les zéros vont par paires,  $\rho$  et son miroir  $\bar{\rho}$ , deux inverses séparés par le vide, et il n'existe « aucune orbite de quatre ». La paire, le vide entre elle, et rien d'autre : trois termes,  $1 \oplus 1 = 3$ .

## 5.7 Le 4 orphelin

**[5.16] Th. Les briques 2 et 3 engendrent tout de 1 à 30, sauf 1 et 4.** Avec les seules briques 2 et 3, sans répéter une brique deux fois de suite, l'addition et la multiplication, appliquées de gauche à droite, engendrent toutes les positions de 1 à 30, sauf exactement deux : 1 et 4 (*La Genèse*, v0.3). Le 4 n'est atteint que par une brique repliée sur elle-même,  $2 \times 2$  : « aucune relation entre les deux briques distinctes ne l'atteint » (*Le Procès de la Preuve*, v7). Alors que  $2 + 3 = 5$ ,  $2 \times 3 = 6$ ,  $3 - 2 = 1$ .

L'auteur l'a dit :

*« Il est le seul nombre, à part 1 bien sûr, qui ne peut être construit par les deux briques en relation. Le seul. »*

*« Y a plus de chantier. On explique que le 4 est le seul nombre pas produit par un jumelage de 2 et 3. Le seul avec 1. »*

**[5.17] L. Une orbite de quatre serait une brique repliée, non une relation.** Une orbite de quatre, pour un zéro, ce serait le zéro, son miroir, son inverse et l'inverse de son miroir, quatre termes distincts. C'est le 4 : une brique repliée sur elle-même, et non une relation. Ce que la relation fabrique, c'est la paire et ce qui naît avec elle. Le quatrième terme n'a pas de naissance dans la grammaire.

## 5.8 La queue de Stevin

L'auteur a dit où ce quatrième terme trouve sa place chez l'hôte :

*« Le groupe de quatre n'agit pas du tout. C'est leur queue de Stevin qui le permet. C'est ouvert. »*

**[5.18] L. Le quatrième terme n'a de place que dans le continu.** Pour qu'un zéro quitte le centre d'un rien, il faut une partie réelle comme  $1/2 + 0,000\dots 1$ , écrite avec une queue de décimales aussi longue qu'on veut. C'est le continu, la droite infiniment divisible (R.27 et R.42). Dans le cadastre, entre la paire (4, 5) et le centre 4,5, il n'y a aucune position : le domaine est clos, et il n'y a pas de place pour un quatrième terme. Dans le continu, il y en a toujours une, aussi près qu'on veut. Le domaine de l'hôte

est ouvert, et c'est pour cela que la question y reste ouverte : sur un domaine ouvert, aucun compte complet n'est possible (chapitre 11).

## 5.9 Deux langues

**[5.19] L. Fermée dans la langue du corpus, ouverte dans celle de l'hôte.** Dans la langue du corpus, la question est fermée : le quatrième terme est le 4, et le 4 ne naît pas de la relation. Le statut est celui d'une Lecture fondatrice, adossée aux Théorèmes [5.14] et [5.16]. Dans la langue de l'hôte, la question est ouverte, et elle le restera tant qu'on y écrira la partie réelle dans le continu : il faudra y démontrer qu'aucun zéro ne se pose sur la queue de décimales. Le dernier pas de l'hôte, en octobre 2026, a vidé la bande au-delà de  $7/8$  ([4.27]) ; le corpus dit pourquoi la bande ne se vide pas d'elle-même dans sa langue, et pourquoi elle est vide dans la sienne. La cible arithmétique qui reste déclarée en Chantier ([3.18]) est d'une autre nature : elle porte sur ce que les deux comptes (A, B) permettent de contrôler, dans la langue de l'hôte.

## 5.10 Ce que ce chapitre ne dit pas

Il ne dit pas que l'hypothèse de Riemann est démontrée dans la langue de l'hôte : il dit pourquoi elle y reste ouverte, et pourquoi elle est fermée dans le cadastre. Il ne revendique aucune des identités : le produit est d'Euler (1737), la factorisation unique est démontrée chez Gauss (1801), la somme  $\pi^2/6$  est d'Euler (1734), les zéros de Hurwitz sont de Davenport et Heilbronn (1936), la grille et ses quatre familles sont déjà au corpus, l'énumération des briques est de la Genèse. Il ne juge ni Euler ni Gauss : chacun a donné ici ce que le corpus garde. Ce qu'il apporte est une lecture, déclarée telle : le produit garde les tours ; il est l'inverse du repliement ; ses deux premiers facteurs sont la grille ; la clôture est ce que le produit et le cadastre ont en commun ; et le quatrième terme est le 4 orphelin, que seul le continu loge.

## 5.11 Pour un enfant

Chaque nombre est une maison construite avec des briques, et les briques sont les nombres premiers : 12, c'est deux briques de 2 et une brique de 3. La somme compte toutes les maisons, l'une après l'autre. Le produit compte les briques, et pour chaque brique combien de fois on l'a prise. Les deux comptes donnent le même résultat, parce que chaque maison n'a qu'une seule recette.

Si l'on enlève toutes les briques de 2 et toutes les briques de 3, les maisons qui restent sont toutes collées à un multiple de 6, juste avant ou juste après : 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19. C'est là que vivent tous les autres nombres premiers.

# Chapitre 6. Les deux extrêmes et l'entre-deux : vingt et un gestes datés

Les chapitres 2 et 3 ont démontré la même erreur de statut aux deux extrêmes des mathématiques :  $\pi$ , l'objet le plus simple (un seul cercle, un seul rapport), et les zéros de  $\zeta$ , l'objet le plus vaste (tous les entiers et tous les premiers à la fois). Ce chapitre montre d'abord que les deux extrêmes portent exactement les mêmes marques. Il date ensuite, entre ces deux bornes, vingt et un gestes de l'histoire des sciences, du nombre à la mesure, à la physique, au vivant, à la société et aux machines, où le corpus lit la même marque ; pour chacun, la date et l'auteur sont des faits, la marque est une lecture, et le renvoi au Registre des Erreurs donne la source. Il donne enfin une contre-épreuve (Huygens a mesuré le mouvement sans passer par la limite) et l'écriture qui ferme sans limite. La thèse que la marque est partout est celle de l'auteur ; elle se réfute ligne par ligne.

*« L'erreur n'est pas dans les calculs ; elle est dans le statut. »*

## 6.1 Les deux bornes portent la même marque

**[6.1] Th.  $\pi$  et les zéros de  $\zeta$  portent tous deux les marques M1 et M2.** Pour  $\pi$  : M1 par [2.4] et [2.5] (le mot « rapport » couvre deux entiers et deux longueurs) ; M2 par [2.6] et [2.7] (la limite des décimales et des réduites, qu'aucune n'atteint). Pour  $\zeta$  : M1 par le dilemme [3.11] (la lettre couvre la somme et le prolongement) ; M2 par [3.5] (le zéro est la limite de l'écart entre la somme et l'aire).

**[6.2] L. La troisième marque, et un seul geste.** Les deux extrêmes portent aussi la marque M3 : le reste sans fin de la règle est attribué au cercle ([2.9], R.30) ; les zéros du prolongement sont attribués aux premiers ([3.13]). Les trois marques sont trois faces d'un seul geste : traiter la limite d'un processus sans fin comme l'objet fini qu'elle approche.

**[6.3] L. Un seul mot couvre ce qui se compte et ce qui se parcourt.** Chaque fois, un seul mot couvre une chose qui se compte et une chose qui se parcourt :  $\zeta$  pour la somme et le prolongement ; « rapport » pour deux entiers et pour deux longueurs ; « nombre » pour une fraction et pour une limite. C'est là que naît l'écart.

## 6.2 La carte de l'entre-deux

**[6.4] L. Thèse de l'auteur : si les deux extrêmes portent le mélange, tout l'entre-deux le porte.** Le tableau date vingt et un gestes. Pour chacun, la date et l'auteur sont des faits ; la marque est une lecture ; la dernière colonne renvoie à l'entrée du Registre des Erreurs (Volume 3, *Le Code et le Registre*) où le geste est inscrit et sourcé.

| Date                       | Geste                                                           | Où entre la marque                                                                                                        | Marque          | Registre               |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------------|
| v. 500<br>av. n. è.<br>628 | Pythagoriciens : la diagonale<br>Brahmagupta : $a \times 0 = 0$ | un rapport de deux longueurs déclaré « sans rapport »<br>le zéro qui scelle un tour et le zéro du rien sous un même signe | M1,<br>M3<br>M1 | R.23<br><br>R.3        |
| 1585                       | Stevin, <i>De Thiende</i>                                       | un tiers écrit comme une queue décimale sans fin                                                                          | M2              | R.27                   |
| 1614                       | Neper ; puis $e = \lim (1 + 1/n)^n$                             | un nombre défini comme terme final d'une suite infinie                                                                    | M2              | R.33                   |
| v. 1684<br>dès<br>1684     | Newton, Leibniz : la dérivée<br>le calcul intégral              | h nul pour le résultat, non nul pour la division<br>une aire comme somme d'une infinité de tranches d'épaisseur nulle     | M1,<br>M2<br>M2 | R.40<br><br>R.41       |
| 1801                       | Gauss : $9 \equiv 0$                                            | le tour accompli et le vide sous un même signe ; le compte des tours jeté                                                 | M1,<br>M3       | R.1,<br>R.2            |
| 1809                       | Gauss : la cloche et les moindres carrés                        | une loi continue à la place d'un compte fini de cas ; le carré jette le signe                                             | M2,<br>M3       | R.20,<br>R.155         |
| 1822                       | Fourier                                                         | un signal fini écrit comme une somme infinie de fréquences ; la position dans le temps perdue                             | M2,<br>M3       | R.44                   |
| 1852 à<br>1877             | Kelvin, Clausius, Boltzmann                                     | un état final atteint en un temps infini ; le cycle accompli lu comme néant                                               | M1,<br>M2       | R.48                   |
| 1859                       | Darwin                                                          | l'ignorance de la cause des variations promue propriété du monde                                                          | M3              | R.110                  |
| 1872 à<br>1874             | Dedekind, Cantor                                                | la droite réelle bâtie sur des coupures et des ensembles infinis achevés                                                  | M2              | R.19                   |
| XIX <sup>e</sup><br>siècle | la mort pensée comme effacement                                 | le zéro du rien posé sur un cycle accompli                                                                                | M1              | R.134                  |
| 1926                       | Born : $ \psi ^2$                                               | le carré jette la phase ; un espace de dimension infinie posé comme nécessaire                                            | M2,<br>M3       | R.69,<br>R.70,<br>R.87 |

| Date        | Geste                                           | Où entre la marque                                                       | Marque | Registre                |
|-------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------|-------------------------|
| 1934        | Kuznets : le revenu national, puis le PIB       | la circulation mesurée avec la règle de la croissance, le geste de $\pi$ | M3     | R.143                   |
| 1947 à 1949 | renormalisation de l'électrodynamique quantique | des infinis engendrés par le cadre, soustraits l'un de l'autre           | M2     | R.100                   |
| 1948        | Schwinger : $\alpha/2\pi$                       | une valeur écrite comme somme sans fin de corrections                    | M2     | R.105                   |
| 1976        | cryptographie à clé publique                    | la sécurité tient au compte des tours jeté par le repliement             | M3     | lecture du corpus R.137 |
| 1979        | la volatilité électorale                        | ce que l'instrument a jeté nommé propriété du peuple                     | M3     | R.137                   |
| 1985        | la norme IEEE 754                               | la queue de Stevin coupée à chaque opération                             | M2     | R.28                    |
| 2017 à 2020 | les grands modèles de langage                   | le mot suivant calculé sans mémoire du chemin                            | M3     | R.144                   |

Le Registre donne, pour plusieurs de ces gestes, la formule qui le frappe. Pour e (R.33), le nombre est défini comme « *le point terminal d'une suite infinie, non comme un rapport* ». Pour la dérivée (R.40), elle « *prétend  $h = 0$  pour le résultat, tout en gardant  $h \neq 0$  pour la division* ». Pour le calcul intégral (R.41), il s'agit d'« *additionner une infinité de presque-riens* ». Pour la loi normale lue ensuite comme une nature qui disperse (R.49), « *la dispersion n'est pas dans le gaz ; elle est dans la somme* ». Pour la renormalisation (R.100), c'est le geste exact du zéro de zêta, une somme sans fin moins une queue sans fin. Pour Born (R.69, R.70), l'interprétation de Copenhague promeut l'information jetée en propriété du monde. Darwin publie *L'Origine des espèces* en 1859, l'année même du mémoire de Riemann. La cryptographie à clé publique est une lecture du corpus sans entrée au Registre : la sécurité repose sur le compte des tours que le repliement jette (voir [8.5]).

## 6.3 La contre-épreuve

**[6.5] F. Huygens mesure le mouvement sans la limite.** Huygens traite le calcul des chances comme une somme finie de cas (*De ratiociniis in ludo aleae*, 1657), la force centrifuge (1659) et le pendule cycloïdal (*Horologium oscillatorium*, 1673) par des triangles semblables et l'ombre du cercle, sans passer par la limite de Newton et de Leibniz. Le pendule est l'ombre du cercle, et la première cloche est une somme finie de cas (R.156).

**[6.6] L. Le geste n'est pas nécessaire, et il est daté.** La contre-épreuve établit deux choses. Le geste n'est pas nécessaire : le mouvement a été mesuré sans lui. Et il est daté : il entre à des moments précis, par des mains précises, ce qui permet de le retirer.

**[6.7] L. Cent cinquante entrées, une seule vue sous cent cinquante angles.**

Entre le cercle et les zéros, partout où une découverte passe par la limite, par le carré ou par le zéro du rien, l'auteur lit au moins une des trois marques. Le Registre en a inscrit plus de cent cinquante, une par une ; « *lues depuis les deux extrêmes, elles sont une seule entrée vue sous cent cinquante angles. Le fil qui les relie n'est dans aucune entrée : il est dans la relation, qui est l'objet même du corpus.* »

## **6.4 L'écriture qui ferme**

**[6.8] L. L'adresse ferme sans limite.** L'écriture  $n = 9k + DR(n)$  ([1.10]) ferme sans limite : le cycle de neuf positions se clôt en 9, et le compte  $k$  des tours accomplis est gardé. Elle distingue le zéro qui scelle un tour accompli du zéro d'épuisement, que la congruence confond. C'est l'écriture de l'ARC ; elle n'a pas besoin du signe égal posé au bout d'une file sans fin pour dire ce qu'est un objet.

## **6.5 Conditions de réfutation et portée**

**[6.9] L. La carte se réfute ligne par ligne.** Toute ligne du tableau dont le geste se réalise sans processus sans fin, sans carré qui jette un signe et sans zéro du rien, en donnant les mêmes objets, est retirée. Toute découverte de l'entre-deux qui ne porte aucune marque compte contre la thèse.

La carte ne dit pas que les découvertes de l'entre-deux sont fausses : leurs calculs tiennent dans la langue où elles ont été faites, comme ceux de Lambert et de Lindemann. Elle date les gestes et dit où la marque entre ; que la marque soit partout est la thèse de l'auteur, Lecture déclarée telle.

**[6.10] L. Résultat principal : une même erreur, démontrée aux deux extrêmes et datée dans l'entre-deux.** L'erreur n'est pas dans les calculs ; elle est dans le statut. Elle consiste à traiter la limite d'un processus sans fin comme l'objet fini qu'elle approche. Elle se démontre aux deux extrêmes et se date dans l'entre-deux. Aux deux extrêmes, la même égalité donne au même objet deux statuts incompatibles :  $\pi$  est appelé rapport et démontré sans rapport, et son écart au compte le plus simple,  $22/7$ , est une aire finie ; le zéro de  $\zeta$  n'est ni celui de la somme des entiers, qui diverge, ni celui du produit des premiers, qui ne peut pas s'annuler : c'est la limite de l'écart entre un compte et une aire qui croissent sans borne. Posée sur le prolongement, la question de Riemann a pour objet une file sans fin, et sa forme la plus fermée est l'écart de deux comptes finis,  $A(N) - B(N)$ , dont la somme est gouvernée par  $\pi$ . Une écriture qui ferme en gardant le compte de ses tours,  $n = 9k + DR(n)$ , n'a pas besoin de la limite pour dire ce qu'est un objet.

# Chapitre 7. P contre NP (I) : la porte, le circuit et le tiers

P contre NP demande si la différence entre vérifier une solution et la trouver est réelle, ou si elle n'est qu'un défaut de nos méthodes. Le corpus a abordé ce problème en mars 2026 avec un argument arithmétique : la porte ET a une pré-image de cardinal 3, et 3 ne rentre dans aucune structure faite de puissances de 2. Cet argument contenait un théorème juste et une implication fausse. La version du 10 septembre 2026, qui fait foi, garde le théorème, retire l'implication avec son contre-exemple, et reconstruit le dossier sur trois constats tirés de la littérature : la phrase « trois ne rentre pas dans deux » est déjà un théorème dans un modèle restreint (Smolensky, 1987) ; toutes les séparations connues ont été payées par un tiers venu du dehors ; la frontière entre 2 et 3 est réelle et classée (Schaefer, 1978). Ce chapitre expose ce dossier, ce qui reste des pièces de mars (les théorèmes conservés), les chantiers ouverts et les deux Prédictions datées. Le chapitre 8 prolonge le dossier avec les résultats d'octobre : le mur des preuves naturelles, les chiffres du compte, et le prix adressé.

*« Trois ne rentre pas dans deux. »*

## 7.1 Le problème rendu réel

Un livreur doit visiter des villes ; vérifier qu'un ordre donné est court se fait en une addition, en trouver un court est une autre affaire. Une grille de sudoku remplie se vérifie en une minute ; la remplir peut prendre une heure. P contre NP demande si cette différence entre vérifier et trouver est réelle ou si elle n'est qu'un défaut de nos méthodes : existe-t-il un problème dont toute solution proposée se vérifie vite et dont aucune méthode ne trouve la solution vite ?

**[7.1] F. La frontière a une adresse : deux contre trois.** Une formule en clauses de deux littéraux se résout en temps polynomial ; à trois littéraux, c'est le problème NP-complet de Cook (1971). Colorier une carte avec deux couleurs est polynomial ; avec trois, NP-complet. Apparier des couples dans deux ensembles est polynomial ; dans trois, NP-complet. Karp l'a écrit en 1972 dans sa liste de vingt et un problèmes. Le problème nu, sans restriction ni oracle, est ouvert depuis 1971.

## 7.2 La base, pour le lecteur qui découvre ARC

ARC lit à travers un cadastre fini, les positions 1 à 9, avec deux briques, 2 et 3, dont les opérations engendrent toutes les positions sauf deux orphelins ([5.16]). Deux principes gouvernent ce dossier.

**[7.2] Th. Le double et le carré ne coïncident qu'en  $n = 2$ .**  $2n = n^2$  n'a qu'une solution entière positive,  $n = 2$  ([4.23]). « *Le double reste dans sa dimension, le carré en change et paie.* »

**[7.3] L. Aucun objet à deux termes ; le tiers paie.** Il n'existe aucun objet à deux termes ; deux termes en relation ont déjà un troisième, leur relation, et ce tiers paie ( $1 \oplus 1 = 3$ ). Un tiers payé par la relation ferme ; un tiers imposé du dehors ne ferme pas. Ce dernier point est le fil de Navier-Stokes (chapitre 9) et il est le fil d'ici.

## 7.3 Théorème : la porte ET ne rentre pas dans le corps à deux éléments

**[7.4] Th. La pré-image de la porte ET n'est pas une classe (mars 2026, conservé).** La porte ET calcule  $(a, b) \mapsto a \wedge b$ . Ses pré-images sont  $ET^{-1}(0) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ , de cardinal 3, et  $ET^{-1}(1) = \{(1, 1)\}$ , de cardinal 1 ; la porte OU a la structure symétrique,  $|OU^{-1}(0)| = 1$  et  $|OU^{-1}(1)| = 3$ . Dans  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ , tout sous-groupe a un ordre qui divise 4, donc un ordre dans  $\{1, 2, 4\}$ , et toute classe a le cardinal de son sous-groupe. Comme  $3 \notin \{1, 2, 4\}$ ,  $ET^{-1}(0)$  n'est la classe d'aucun sous-groupe. Sur  $n$  bits, la pré-image de 0 par  $x_1 \wedge x_2$  compte  $3 \times 2^{n-2}$  points, alors que tout sous-espace et toute classe affine de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  a un cardinal  $2^k$ .

**[7.5] Th. Irréductibilité de 3 dans  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  (mars 2026, conservé).** Pour tout  $k$ , 3 ne divise pas  $2^k$ . Donc aucun sous-ensemble de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  de cardinal divisible par 3 n'est un sous-espace affine, une classe ou un sous-groupe.

*Démonstration.*  $2^k$  est une puissance de 2 et  $\text{pgcd}(3, 2) = 1$  ; par le théorème fondamental de l'arithmétique, 3 ne divise pas  $2^k$ . Tous les sous-groupes de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  ont un ordre  $2^k$  par le théorème de Lagrange, et leurs classes ont le même cardinal. *Contrôles :* 3 ne divise aucun  $2^k$  jusqu'à  $k = 200$  ; les sous-espaces de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ , énumérés, ont pour cardinaux exactement  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$  ; la pré-image de 0 de  $x_1 \wedge x_2$  sur 4 bits a 12 éléments, qui n'est pas une puissance de 2.

**[7.6] L. Définition : la pré-image amorphe.** Une pré-image  $f^{-1}(b)$  dans  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  est dite amorphe si elle n'est ni une classe, ni un sous-espace affine, ni la réunion d'un nombre borné de telles structures. La version de mars en donnait une forme équivalente par le cardinal (un facteur premier autre que 2) ; seule la première forme est une définition sûre, la seconde n'en est qu'un signe suffisant pour une seule classe.

« *Le nombre 3 est un corps étranger permanent dans l'espace booléen.* »  
(mars 2026)

## 7.4 Ce que ce théorème ne dit pas : le contre-exemple

**[7.7] Th. Une pré-image amorphe n'implique pas une recherche dure.** La fonction  $x_1 \wedge x_2$  elle-même, sur  $n$  bits, a une pré-image de 0 amorphe, de cardinal  $3 \times 2^{n-2}$ , et l'on trouve un  $x$  avec  $f(x) = 0$  en un geste : tous les bits à zéro. L'amorphisme d'une pré-image de porte n'implique donc pas la dureté de la recherche.

Ce n'est pas un écart à combler, c'est une implication fausse telle qu'écrite, et elle est retirée (annexe B). Ce qui pourrait être dur n'est pas la porte, c'est le circuit : la façon dont des milliers de pré-images amorphes se composent, et ce qu'il en coûte de les défaire ensemble.

## 7.5 Constat : la phrase est un théorème en profondeur bornée

**[7.8] F. Razborov et Smolensky (1987) : le compte par 3 échappe aux circuits qui comptent par 2.** Un circuit de profondeur constante, de taille polynomiale, fait de portes ET, OU, NON et de portes qui comptent par paquets de 2, ne peut pas calculer si le nombre de bits à 1 est divisible par 3 ; et, en général, le compte par paquets de  $p$  ne se calcule pas avec des portes de compte par paquets de  $q$ , pour deux premiers distincts  $p$  et  $q$ . Le cœur de la preuve est que les polynômes sur le corps à  $q$  éléments ne peuvent pas approcher le compte par paquets de  $p$ , et  $\text{pgcd}(p, q) = 1$  en est la raison.

Trois ne rentre pas dans deux, démontré, dès que la profondeur est bornée. La version de mars ne le citait pas ; c'est le meilleur reçu de sa phrase.

## 7.6 Constat : toutes les séparations connues sont forcées

**[7.9] F. Chaque séparation a été payée par un tiers.**

| Résultat                   | Ce qui est séparé                                                                                | Le tiers imposé du dehors                                 |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Baker, Gill, Solovay, 1975 | $P^A = NP^A$ pour un oracle $A$ ; $P^B \neq NP^B$ pour un oracle $B$                             | un oracle, une caisse extérieure que la machine interroge |
| Razborov, 1985             | la clique exige des circuits monotones de taille exponentielle                                   | la restriction aux portes monotones, sans NON             |
| Håstad, 1986               | la parité exige des circuits de profondeur bornée de taille exponentielle                        | la profondeur bornée, sans portes de compte               |
| Razborov, Smolensky, 1987  | le compte par 3 hors des circuits qui comptent par 2 ; par $p$ hors de ceux qui comptent par $q$ | la profondeur bornée                                      |
| Le problème nu             | $P$ contre $NP$ , profondeur libre, sans oracle                                                  | aucun : ouvert depuis 1971                                |

Oracle, monotonie, profondeur bornée : à chaque fois la séparation a été payée d'ailleurs, par un tiers que le problème nu ne fournit pas. C'est le motif de Navier-Stokes (paroi, rugosité, force) transposé : « *ce qui casse a toujours reçu un coup de main de la fenêtre* ».

## 7.7 Constat : la frontière 2 → 3 est classée

**[7.10] F. La dichotomie de Schaefer (1978).** Un problème de satisfaction booléenne à contraintes fixées est dans P si et seulement si ses contraintes sont toutes 0-valides, ou toutes 1-valides, ou Horn, ou anti-Horn, ou affines, ou bijonctives (2-SAT) ; sinon il est NP-complet. Les cas faciles sont exactement ceux dont l'ensemble des solutions a une structure fermée : classes affines, cônes de Horn, graphes d'implication à deux littéraux. Les cas durs sont ceux où aucune telle fermeture n'existe.

**[7.11] L. Schaefer lu comme frontière entre structure et amorphisme (mars 2026, conservé comme Lecture).** Le cas affine correspond aux circuits faits de OU exclusif et de NON seulement : pas de porte ET, pas d'amorphisme ; les pré-images sont des sous-espaces affines de cardinal  $2^k$ , structurées et traitables. Les cas Horn et anti-Horn correspondent à des structures ET/OU restreintes, dont les pré-images, sans être affines, ont une structure dirigée et monotone exploitable par propagation unitaire : un amorphisme borné. Les cas NP-complets, dont 3-SAT, correspondent à la composition ET/OU sans restriction : un amorphisme plein. Pour 3-SAT, chaque clause sur trois variables a  $|clause^{-1}(0)| = 1$  et  $|clause^{-1}(1)| = 7$ , et 7, comme 3, est premier avec 2. Cette lecture est juste comme Lecture de la frontière ; elle n'en est pas la cause démontrée.

**[7.12] F. Réserve : la frontière n'est pas l'arité seule.** PARTITION en deux sous-ensembles est NP-complet, par les poids et non par l'arité ; 2-SAT est facile mais MAX-2-SAT est dur.

**[7.13] L. Le tiers qui coûte.** « *Le tiers qui coûte n'est pas toujours le troisième littéral ; c'est toujours ce qui empêche l'ensemble des solutions de se fermer.* » Cette réserve protège la Lecture au lieu de l'affaiblir.

## 7.8 Lecture : le tiers payé du dehors

**[7.14] L. Faire rentrer 3 dans 2 exige un tiers payé du dehors.** Faire rentrer 3 dans 2, dans un modèle de calcul, c'est donner à la machine de quoi payer ce que la structure du corps à deux éléments ne paie pas. L'oracle paie en répondant ; la restriction paie en interdisant les portes qui composent ; la profondeur bornée paie en interdisant la composition longue. À chaque fois le tiers vient de la fenêtre, et la séparation apparaît. Sans tiers, sur le problème nu, personne n'a rien séparé, et la Lecture dit pourquoi : la composition à profondeur libre est l'endroit où les pré-images amorphes peuvent se réorganiser, comme les tubes de vortécité, et où il faut une inégalité au bon rang pour montrer qu'elles ne peuvent pas se défaire à coût polynomial. *Critère de chute* : une séparation de P et NP obtenue sans oracle ni restriction par une propriété de porte seule, ou un algorithme polynomial pour 3-SAT.

## 7.9 Ce qui reste des pièces de mars 2026

Les deux pièces de mars,  $P \neq NP$  v2 et  $P \neq NP$  comme irréversibilité structurelle dans la topologie de compression v1.0, sont remplacées. Leurs thèses et les implications vers la dureté sont retirées (annexe B). Les énoncés suivants, vérifiables par eux-mêmes, restent.

**[7.15] Th. Le lemme de la partition en puissances de 2.** Soit  $C$  un circuit booléen à  $n$  entrées et une sortie. Si  $|C^{-1}(0)|$  et  $|C^{-1}(1)|$  sont tous deux des puissances de 2, alors  $|C^{-1}(0)| = |C^{-1}(1)| = 2^{n-1}$ .

*Démonstration.*  $|C^{-1}(0)| + |C^{-1}(1)| = 2^n$ . Posons  $2^a$  et  $2^b$ ,  $a \leq b$ . Alors  $2^a(1 + 2^{b-a}) = 2^n$ . Si  $b > a$ ,  $1 + 2^{b-a}$  est impair, alors que  $2^{n-a}$  est pair : contradiction. Donc  $b = a$ , et  $2 \times 2^a = 2^n$ , d'où  $a = n - 1$ . Un circuit non équilibré a donc au moins une pré-image dont le cardinal n'est pas une puissance de 2.

**[7.16] Th. Caractérisation affine.** Les fonctions calculées par des circuits faits seulement de portes NON et OU exclusif sont les fonctions affines  $f(x) = a_1x_1 \oplus \dots \oplus a_nx_n \oplus c$ . Toute fonction affine dont un coefficient  $a_i$  est non nul est équilibrée : pour toute valeur fixée des autres variables, la moitié des entrées donne 0 et la moitié donne 1.

**[7.17] L. Défaire n'est pas inverser (Bennett).** Bennett (1973) a montré que tout calcul de durée  $T$  peut être rendu réversible avec une mémoire supplémentaire de l'ordre de  $T$ . Ce théorème donne le *défaire* : rejouer à l'envers un calcul qu'on a fait, avec son historique. Il ne donne pas l'*inversion* : trouver  $x$  à partir de  $y = f(x)$  sans avoir fait le calcul. La construction de Bennett enregistre les états intermédiaires de  $f(x)$  et les rejoue à l'envers ; pour commencer l'enregistrement, il faut fournir  $x$ , qui est l'objet de la recherche. Le théorème ne contredit donc pas  $P \neq NP$  ; vis-à-vis de l'inversion, il est circulaire.

**[7.18] Th. La pauvreté booléenne.** En base 2 : (a) la seule bijection non triviale de  $\{0, 1\}$  dans  $\{0, 1\}$  est NON (les quatre fonctions sont l'identité, NON, la constante 0, la constante 1) ; (b) toute porte à deux entrées  $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  est une compression, quatre entrées pour deux sorties, et deux entrées au moins partagent une sortie (principe des tiroirs) ; (c) une fonction de  $n$  bits vers 1 bit qui dépend de ses  $n$  variables exige au moins  $n - 1$  portes à deux entrées, chacune irréversible, puisque NON garde le nombre de fils et que seules les portes qui combinent le réduisent. La condition « qui dépend de ses  $n$  variables » est ajoutée ici ; la version de mars l'énonçait pour toute fonction.

**[7.19] Th. La richesse cadastrale.** Sur les neuf positions, que l'inversion  $\varphi(x) = 9 - x$  range en trois chambres (le rail droit  $\{1, 4, 7\}$ , le rail gauche  $\{2, 5, 8\}$ , l'axe central  $\{3, 6, 9\}$ ), et où la racine numérique respecte l'addition et la multiplication : (a) il y a  $9! = 362\,880$  bijections d'un chiffre (le groupe symétrique  $S_9$ ) ; (b) parmi les multiplications par  $k = 1, \dots, 8$ , sur les neuf positions lues par leur reste, exactement six sont des bijections ( $\times 1, 2, 4, 5, 7, 8$ , celles où  $\text{pgcd}(k, 9) = 1$ ) et deux sont des compressions ( $\times 3$  et  $\times 6$ ) ; (c) toutes les additions d'une constante sont des bijections ; (d) le « NON contrôlé » additif  $(a, b) \mapsto (a + b, b)$  est une bijection sur les 81 paires, d'inverse  $a = \text{sortie} - b$  ; (e) pour  $n$  chiffres, les bijections chiffre par chiffre forment un groupe d'ordre  $(9!)^n \approx 2^{\{18,5 n\}}$  (car  $\log_2 9! = 18,47$ ).

**[7.20] L. L'écart de simulation (rétrogradé).** La pièce de mars définissait la *complexité de réversibilité*  $RC_b(f)$  comme le nombre minimal de portes irréversibles (non bijectives) dans un circuit qui calcule  $f$  avec le jeu de portes standard de la base  $b$  ; une porte  $g : S^k \rightarrow S^m$  est réversible si  $k = m$  et si  $g$  est une bijection, et une compression si son image est plus petite que  $S^k$  ; toute compression détruit au moins  $\log_2(|S^k| / |\text{Image}(g)|)$  bits d'information (Landauer, 1961). Elle posait en Théorème que la simulation en base 2 d'un calcul en base 9 garde le temps mais non la réversibilité :  $\times 2$  sur un chiffre de base 9 est une seule opération bijective, alors que sa simulation sur 4 bits passe par des additions avec retenue, donc par des portes ET, qui compressent. C'est exact dans le jeu de portes à deux entrées et une sortie ; c'est faux si l'on admet en base 2 des portes réversibles comme celle de Toffoli, bijection sur 3 bits, avec laquelle toute permutation de 4 bits se réalise sans perte. L'énoncé dépend donc du jeu de portes, et il redevient Lecture : la base reçue choisit des portes qui jettent, ce que le corpus appelle l'amnésie de  $9 \equiv 0$  transposée au calcul.

**[7.21] L. La hiérarchie cadastrale des compressions.** Les calculs discrets se rangent en quatre niveaux selon la compression : niveau 0, la bijection (pré-image d'un seul élément ; NON,  $\times 2$  sur les positions) ; niveau 1, la compression bornée  $k$  pour 1 (Collatz lu en racines, trois pour un) ; niveau 2, la compression structurée (pré-images en classes ou sous-espaces affines ; SAT linéaire, 2-SAT), polynomiale ; niveau 3, la sédimentation (sous-ensembles sans structure ; 3-SAT), sans algorithme polynomial connu. La version de mars y rangeait la factorisation au niveau 3 avec une inversion « exponentielle » : cela n'est pas démontré, et la factorisation n'est pas connue pour être NP-complète. La correspondance avec Schaefer est une relecture d'un théorème existant.

**[7.22] Th. La sédimentation des produits consécutifs.** Soit  $P(n, k) = n(n + 1) \dots (n + k - 1)$  le produit de  $k$  entiers consécutifs. La racine de  $P(n, k)$  prend toutes les valeurs de 1 à 9 pour  $k = 1$  ; elle est confinée dans  $\{2, 3, 6, 9\}$  pour  $k = 2$  ; dans  $\{3, 6, 9\}$ , l'axe, pour  $k = 3, 4, 5$  ; et elle vaut toujours 9 pour  $k \geq 6$ .

*Démonstration.* Pour  $k \geq 3$ , parmi  $k$  entiers consécutifs l'un au moins est divisible par 3. Pour  $k \geq 6$ , deux au moins le sont, le produit contient  $3^2 = 9$ , et  $DR(9m) = 9$ . Pour  $k = 2$ ,  $DR(n(n + 1))$  ne dépend que de  $d = DR(n) : d = 1 \text{ à } 9$  donne 2, 6, 3, 2, 3, 6, 2, 9, 9.

**[7.23] L. La multiplication par voisins est une sédimentation.** Chaque facteur supplémentaire comprime la racine vers l'horizon de clôture 9 ; la compression est monotone, irréversible et structurellement déterminée. C'est l'analogue, dans le système des chiffres, de la sédimentation computationnelle : chaque porte comprime, et la compression s'accumule.

**[7.24] L. Le principe de l'échiquier : le déterminisme crée la liberté.** Un échiquier a 64 cases, le nombre engendré par la grille de structure (8 triplets  $\times$  8 lectures). Les règles sont strictes et déterministes ; pourtant le nombre de parties possibles, estimé à plus de  $10^{120}$ , dépasse le nombre d'atomes de l'univers observable, de l'ordre de  $10^{80}$ . « Les règles n'éliminent pas la liberté. Elles l'engendrent. Sans contraintes, pas de jeu. Sans structure, pas de choix. » La vérification est l'acte de contrôler un coup contre les règles, linéaire et bon marché ; la recherche est l'acte

de trouver une stratégie gagnante dans l'espace des parties, combinatoire et chère. « *L'écart est la liberté même.* » Le chapitre 8 reprend l'échiquier par son bord ([8.27]).

**[7.25] L. Le parallèle avec Yang-Mills (mars 2026).** Les pièces de mars mettaient en regard deux paires : en Yang-Mills, (3, 8) avec  $3 + 8 = 11 \neq 9$  ; en P contre NP, (3,  $2^k$ ) avec  $\text{pgcd}(3, 2) = 1$ . « *Le confinement et la NP-dureté sont deux lectures de la même tension structurelle* » : le nombre 3, le cercle inscrit, le générateur, est étranger à l'espace qu'il doit habiter, le cercle circonscrit (8) dans un cas, le corps booléen dans l'autre. Le parallèle reste une Lecture ; la ligne « coût d'inversion exponentiel » qu'il portait reposait sur l'implication retirée ([7.7]) et ne vaut pas.

## 7.10 Chantiers

**[7.26] Chantier. C-1 : faire monter Smolensky au-delà de la profondeur bornée.** Le mur a un nom, les preuves naturelles (Razborov et Rudich, 1997) : toute propriété de tables de vérité qui est à la fois constructive et large ne peut pas donner de borne inférieure de circuit si des fonctions pseudo-aléatoires existent. L'amorphisme des pré-images est une propriété de tables de vérité ; la version de mars l'écartait de la barrière en une phrase, et cette phrase est retirée : tant qu'on n'a pas montré que la propriété utilisée n'est ni constructive ni large, la barrière tient. La route qui reste est celle de la composition, pas de la porte : « *une quantité qui croît avec la profondeur et que 3 force à croître plus vite que 2 ne peut suivre, sans jamais lire la table entière* ». Le chapitre 8 nomme une forme de ce pas : lever la largeur hors du modèle de la résolution ([8.21]).

**[7.27] Chantier. C-2 : la frontière de Schaefer lue depuis les orphelins.** Les six classes faciles et les positions du cadastre qui les portent, avec un critère qui puisse échouer.

## 7.11 Prédictions préenregistrées

**[7.28] P. P-1 (10 septembre 2026) : les séparations de la décennie passeront par un tiers.** Toute séparation de classes de complexité obtenue dans les dix prochaines années passera par un modèle restreint ou un oracle ; aucune ne séparera P de NP sur le problème nu par une propriété de porte seule. *Reçu* : les publications vérifiées de séparations. *Chute* : une séparation nue, vérifiée, fondée sur une propriété locale de porte.

**[7.29] P. P-2 (10 septembre 2026) : si le problème nu est résolu, ce sera  $P \neq NP$ .** *Reçu* : une preuve vérifiée par assistant de preuve. *Chute* : une preuve vérifiée de  $P = NP$ , ou un algorithme polynomial pour 3-SAT avec son certificat.

## 7.12 Conclusion du dossier de septembre

« *Trois ne rentre pas dans deux : c'est un théorème sur la porte, un théorème de Smolensky en profondeur bornée, et une frontière réelle classée par Schaefer. Ce n'est pas encore un théorème sur le circuit à profondeur libre,*

*et le corpus ne dit plus que ça l'est. Il dit, comme pour le fluide, de quel côté toutes les brèches connues ont été percées, avec un tiers venu du dehors, et il prédit, daté, que le problème nu tiendra dans le sens de la séparation. Ce qui n'est pas fermé est nommé : faire monter Smolensky sans lire la table, contre les preuves naturelles. C'est là qu'il faut marcher. »*

# Chapitre 8. P contre NP (II) : le mur, le compte et le prix

Le chapitre 7 a établi que toutes les séparations connues ont été payées par un tiers, et que le pas qui reste bute sur un mur nommé, les preuves naturelles. Ce chapitre, tiré de la pièce transversale d'octobre 2026, examine ce mur et ce qu'il est fait. Il montre que l'hypothèse qui fonde le mur contient déjà la séparation ; que les bits dits pseudo-aléatoires d'un générateur par repliement sont exactement le compte des tours jeté par le pli ; que la méthode qui a fondé la complexité (le compte de Shannon) a remplacé la relation nommée par un tirage ; que toutes les fermetures faciles de Schaefer sont des chiffres d'un compte, à deux ou à trois bits, et que sous deux conditions simples la retenue et le chiffre du compte de trois décident seuls de la frontière ; que connaître le compte ne donne pas l'adresse ; et enfin que l'énoncé du prix pose la question du tout ou rien, alors que le réel se règle par un prix adressé : la question que l'énoncé ne pose pas est « qui paie ». Chaque compte est refait en annexe D.

L'auteur a posé la question le 12 octobre 2026 :

« *C'est local-global.* » On peut tout régler globalement en sacrifiant des contraintes ; localement, les contraintes doivent être acceptées, sinon viennent le mécontentement, le blocage, l'inflammation. « *La réponse est dans le local et sa borne de contraintes, sacrifices et bénéfices.* » « *La contrainte est duelle, et surtout la perception.* » « *Le prix est duel.* »

et il en a donné l'image : un joueur préférerait jouer avec un autre, et le trio local s'en porterait mieux, mais l'entraîneur refuse, parce que cela affaiblirait les trois tris offensifs.

## 8.1 Ce qui manque : le tiers

**[8.1] Th. La porte ET sur  $n$  bits.** Dans  $\{0, 1\}^n$ , la pré-image de 0 par  $x_1 \wedge x_2$  compte  $3 \times 2^{n-2}$  points. Ce nombre n'est jamais une puissance de 2 ; elle n'est donc ni un sous-groupe ni une classe affine de  $\{0, 1\}^n$ , qui ont toutes  $2^k$  éléments (vérifié pour  $n = 2$  à 20 ; voir [7.4]).

Ce qui manque est le tiers : chaque séparation obtenue a reçu une restriction ou un oracle venus du dehors ([7.9]), et le problème nu n'en fournit aucun.

## 8.2 Le mur est fait de la séparation

**[8.2] F. Le mur des preuves naturelles (Razborov et Rudich, 1997).** Une preuve est dite naturelle si elle repose sur une propriété des tables de vérité qui est constructive et large. Aucune preuve naturelle ne peut établir des bornes inférieures de circuits assez fortes pour séparer P de NP, si des fonctions pseudo-aléatoires existent. Une fonction pseudo-aléatoire est un objet calculé, entièrement déterminé par sa graine, qu'aucun test polynomial ne distingue d'un tirage ; le mur demande en outre une dureté quantitative, de type  $2^{\Omega(\epsilon)}$ , plus forte que la seule résistance aux tests polynomiaux.

**[8.3] Th. L'hypothèse du mur contient déjà la séparation.** L'existence de fonctions pseudo-aléatoires entraîne celle de fonctions à sens unique, laquelle entraîne  $P \neq NP$ .

*Démonstration.* Une famille de fonctions pseudo-aléatoires donne un générateur pseudo-aléatoire, et tout générateur est une fonction à sens unique (Goldreich, *Foundations of Cryptography*, 2001, chapitre 3). Si  $P = NP$ , toute fonction calculable en temps polynomial s'inverse en temps polynomial, puisque trouver un antécédent est un problème de NP ; il n'existe alors aucune fonction à sens unique. C'est un fait de la littérature, connu des spécialistes.

Le mur qui arrête les preuves naturelles n'existe donc que dans un monde où la réponse est déjà la séparation. « *Il ne dit pas que la séparation est fausse ; il dit qu'une certaine langue ne peut pas l'écrire.* »

## 8.3 Le pseudo-aléatoire est le compte des tours jeté

**[8.4] Th. Les bits du pli sont l'écriture du compte des tours.** Soit  $x_0 \in [0, 1)$  et le doublement replié  $x_{k+1} = 2x_k - b_{k+1}$ , où  $b_{k+1} \in \{0, 1\}$  est la partie entière de  $2x_k$ . Alors le compte des tours jetés après  $n$  pas est  $w_n = \lfloor 2^n x_0 \rfloor = \sum_{k=1}^n b_k 2^{n-k}$  : les bits sortis par le pli sont exactement l'écriture du compte des tours. Avec ce compte,  $x_0 = (x_n + w_n)/2^n$ , sans reste ; sans lui, la position  $x_n$  a  $2^n$  antécédents.

*Démonstration.* Par récurrence,  $2^n x_0 = w_n + x_n$  avec  $0 \leq x_n < 1$ . Le pas :  $2^{n+1} x_0 = 2(w_n + x_n) = 2w_n + b_{n+1} + x_{n+1}$ , d'où  $w_{n+1} = 2w_n + b_{n+1}$  : l'écriture binaire de  $w_n$  est la suite des bits sortis.

*Calculs montrés.* Pour  $x_0 = 1/3$ , les tours jetés sont 0, 0, 1, 2, 5, 10, 21, 42, 85 ( $n = 0$  à 8), c'est-à-dire  $\lfloor 2^n/3 \rfloor$ , et chacun double le précédent en ajoutant le bit sorti ; la remontée se fait sans reste, et sans les tours la position après 8 pas a 256 antécédents. Pour  $x_0 = 1/1\ 000\ 003$ , le pli sort 4000 bits, dont 1952 uns, équilibrés à 2,4 % près, et la suite se rejoue à l'identique ; ces bits sont, chiffre pour chiffre, la partie entière de  $2^{4000}/1\ 000\ 003$ .

**[8.5] L. Le pseudo-aléatoire est une suite déterminée dont on n'a pas le compte (M3).** Ce que l'outil appelle pseudo-aléatoire est une suite entièrement déterminée dont le lecteur n'a pas le compte des tours (M3). Le mur de Razborov et Rudich dit qu'une propriété lue sur la table entière ne voit pas ce compte. [8.4] établit la réversibilité quand le registre est en main, et elle dit la taille de ce registre :  $n$  bits,

exactement ce qu'il faut pour distinguer  $2^n$  antécédents, et pas un de moins. Elle ne dit pas le coût d'obtenir le registre à partir de la seule position : c'est la question cryptographique, et elle reste ouverte. Un générateur presque équilibré n'établit pas l'indistinguabilité ; il montre seulement de quoi elle est faite. C'est aussi la lecture de la cryptographie à clé publique de la carte du chapitre 6 : la sécurité tient au compte des tours jeté par le repliement.

**[8.6] Chantier. Information, registre et reconstruction.** Suivre ensemble l'information conservée, la taille du registre et le coût de sa reconstruction.

## 8.4 Où la piste s'est perdue

**[8.7] F. Le compte de Shannon (1949) et la borne explicite (2022).** Shannon démontre que presque toutes les fonctions booléennes de  $n$  variables exigent des circuits de taille de l'ordre de  $2^n/n$ . La preuve compte : il y a  $2^{2^n}$  fonctions et beaucoup moins de petits circuits. Pour  $n = 20$ , les circuits de moins de 30 985 portes ne peuvent pas calculer toutes les fonctions. La difficulté est établie pour la fonction typique, jamais pour une fonction nommée. Soixante-quinze ans plus tard, la meilleure borne inférieure connue pour une fonction explicite de NP est d'environ  $3,1n$  portes (Li et Yang, 2022).

*Calcul montré.* En majorant le nombre de circuits à  $s$  portes par  $(16(n + s)^2)^s$  (chaque porte choisit l'une des 16 fonctions de deux bits et deux entrées parmi  $n + s$  fils), ce nombre reste sous  $2^{\{2^{20}\}} = 2^{\{1\,048\,576\}}$  tant que  $s \times \log_2(16(20 + s)^2) < 1\,048\,576$ , c'est-à-dire jusqu'à  $s = 30\,985$ .

**[8.8] L. La méthode qui a fondé le domaine est celle qui l'empêche de conclure.** La question de Gödel à von Neumann (lettre du 20 mars 1956) portait sur un objet nommé, la recherche d'une preuve. Sept ans plus tôt, le compte de Shannon avait remplacé la relation nommée par un tirage dans l'ensemble des fonctions : la difficulté était devenue une propriété de « presque toutes », c'est-à-dire de l'instrument (M3). Le mur des preuves naturelles est l'ombre exacte de ce compte : il interdit les propriétés *larges*, celles qui valent pour presque toutes les fonctions. « *La méthode qui a fondé le domaine est celle qui l'empêche de conclure. La piste se retrouve en revenant à la relation nommée.* »

## 8.5 Les deux lectures sont les deux chiffres d'un compte

**[8.9] Th. Le compte de trois bits : la retenue et le chiffre.** Pour trois bits  $a, b, c$ , avec  $\text{maj}$  la majorité et  $\text{min} = a \oplus b \oplus c$  la minorité,  $a + b + c = 2 \text{maj}(a, b, c) + \text{min}(a, b, c)$ . La majorité est la retenue du compte, la minorité en est le chiffre. (Vérifié sur les huit triplets : par exemple  $1 + 1 + 0 = 2 \times 1 + 0$  et  $1 + 1 + 1 = 2 \times 1 + 1$ .)

**[8.10] F. Les fermetures de Schaefer, et leur extension.** Un problème de satisfaction booléenne est dans P si ses relations ferment sous l'une des opérations suivantes : une constante, le ET, le OU, la majorité, la minorité ; sinon il est NP-complet (Schaefer, 1978, sous sa forme par les opérations de fermeture). Le résultat s'étend à tout domaine fini (Bulatov, 2017 ; Zhuk, 2017, publié en 2020). Les relations

fermées par la majorité sont celles de 2-SAT ; celles fermées par la minorité sont les systèmes linéaires sur  $\{0, 1\}$ .

**[8.11] Th. Le compte de deux bits.** Pour deux bits,  $a + b = 2(a \wedge b) + (a \oplus b)$  et  $a + b = (a \vee b) + (a \wedge b)$ . Le ET est la retenue du compte de deux ; le OU en est la somme moins la retenue.

**[8.12] L. Toutes les fermetures de Schaefer sont des chiffres d'un compte.** Par [8.9] et [8.11], toutes les fermetures non triviales de Schaefer sont des chiffres d'un compte : la majorité et la minorité sont la retenue et le chiffre du compte de trois ; le ET et le OU sont ceux du compte de deux (les contraintes de Horn gardent la retenue à deux). La minorité est l'addition dont la retenue est jetée : c'est le pli qui fait du 2 un 0, la congruence selon 2.

**[8.13] Th. Le recensement des relations sans pôles.** En arité 3, sur les 63 relations non vides qui ne contiennent ni 000 ni 111 (les deux pôles), 24 ferment par la majorité et la minorité, 24 par la majorité seule, 0 par la minorité seule, 15 par aucune des deux. En arité 4, sur les 16 383 relations sans pôles : 168, 1472, 21 et 14 722, dont 4 ferment encore par le ET et 4 par le OU, par exemple  $x_1 \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$ .

**[8.14] Th. Théorème de la frontière.** Soit R une relation booléenne non vide sans les deux pôles et sans position figée (chaque coordonnée prend les deux valeurs dans R). Alors R ne ferme ni par une constante, ni par le ET, ni par le OU ; et le problème de satisfaction à contraintes R est polynomial si R ferme par la majorité ou par la minorité, NP-complet sinon.

*Démonstration.* Si R fermait par le ET, le ET de toutes ses lignes serait 0...0, puisque chaque coordonnée prend la valeur 0 quelque part ; ce pôle est exclu. De même pour le OU et 1...1. Les constantes sont exclues par l'absence des pôles. Il reste, dans la dichotomie de Schaefer, la majorité (cas bijonctif) et la minorité (cas affine). *Recensement :* en arité 4, 15 565 relations vérifient les hypothèses : 34 ferment par les deux, 1068 par la majorité seule, 13 par la minorité seule, 14 450 par aucune, et aucune par le ET ou le OU.

**[8.15] L. Trois ne rentre pas dans deux parce que  $3 = 2 \cdot 1 + 1$ .** Il faut la retenue et le chiffre pour porter trois, et une porte booléenne n'en rend qu'un. Une relation facile survit à la perte d'une moitié du compte, à deux ou à trois ; une relation dure n'en garde aucun. Une position figée est un local dont le sacrifice est déjà fait ; sans elle, la frontière se lit sur le seul compte de trois ([8.14]).

## 8.6 Le compte sans l'adresse

**[8.16] Th. Le compte dit combien, non qui.** Les configurations 100, 010, 001 ont le même compte, 1, la même retenue, 0, et le même chiffre, 1. Pour trois bits, les comptes 0, 1, 2, 3 sont portés par 1, 3, 3, 1 configurations.

**[8.17] F. 1-dans-3 SAT est NP-complet.** Le problème où chaque contrainte impose exactement un 1 parmi trois variables est NP-complet (Schaefer, 1978), alors que le compte y est connu d'avance et partout égal à 1.

**[8.18] L. La difficulté est entièrement dans l'adresse.** Le compte est localement

fixé ; ce qu'il faut trouver est une attribution des adresses compatible d'une contrainte à l'autre. La difficulté est entièrement dans l'adresse.

## 8.7 La largeur

**[8.19] F. La largeur de résolution.** Dans le système de la résolution, une réfutation combine deux clauses en jetant une variable. Sa largeur est le plus grand nombre de littéraux tenus ensemble. Pour 2-CNF la largeur ne dépasse jamais 2, puisque deux clauses à deux littéraux résolvent en une clause à deux littéraux au plus (200 instances insatisfiables vérifiées dans la pièce source). Pour les pigeons ( $n + 1$  pigeons,  $n$  trous) la largeur est d'ordre  $n$ , et toute réfutation a une taille d'au moins  $\exp((w - w_0)^2/n)$  (Haken, 1985 ; Ben-Sasson et Wigderson, 2001).

**[8.20] L. La largeur est le compte des retenues tenues ensemble.** Dans le modèle de la résolution, sa croissance force la taille. Ce modèle est lui-même une restriction, un tiers.

**[8.21] Chantier. Lever la largeur hors du modèle de la résolution.** C'est le pas que le chapitre 7 nomme C-1 ([7.26]).

## 8.8 La question qui manque : le prix est duel

L'énoncé du prix demande s'il existe une affectation qui satisfait *toutes* les contraintes. À chaque contrainte correspond un prix, la variable duale ; le problème côté affectations et le problème côté prix sont deux lectures d'une seule situation, et ils ferment ensemble quand leurs valeurs coïncident. L'écart entre les deux est l'écart de dualité.

**[8.22] F. Paires et trios (König, 1931 ; Karp, 1972).** Former des paires entre deux groupes (couplage biparti) est dans P, et la lecture par prix  $y$  est exacte : la valeur fractionnaire égale la valeur entière, pour toute instance (König, 1931). Former des trios à partir de trois groupes (couplage tridimensionnel) est NP-complet (Karp, 1972).

**[8.23] Th. Trois trios : l'écart d'intégralité, et sa fermeture par un sacrifice.** Soit trois trios qui se chevauchent deux à deux par un joueur :  $T_1 = (c_1, g_1, d_1)$ ,  $T_2 = (c_1, g_2, d_2)$ ,  $T_3 = (c_2, g_2, d_1)$ . La lecture par prix donne  $3/2$ , chaque trio pris à moitié, avec un prix de  $1/2$  sur trois joueurs ( $c_1, g_2, d_1$ ), et l'écart de dualité linéaire est nul : fractionnaire et prix coïncident. La lecture entière donne 1 : l'écart de  $1/2$  est un écart d'intégralité, entre le fractionnaire et l'affectation réelle. Dès qu'un trio cède en entier, les deux lectures donnent 1, le prix se concentre sur un seul joueur et vaut 1, et tous les autres prix sont nuls : l'écart d'intégralité est nul.

*Démonstration.* Programme linéaire et écarts complémentaires (Kuhn et Tucker, 1951). Chaque joueur partagé porte la contrainte « la somme des parts des trios qui le contiennent ne dépasse pas 1 » :  $z_1 + z_2 \leq 1$  ( $c_1$ ),  $z_2 + z_3 \leq 1$  ( $g_2$ ),  $z_1 + z_3 \leq 1$  ( $d_1$ ). La somme donne  $2(z_1 + z_2 + z_3) \leq 3$ , atteinte à  $1/2$  chacun ; deux trios entiers partagent toujours un joueur, donc l'entier vaut 1. *Contrôle* : sur des instances bipartites tirées par un générateur (60 refaites en annexe D, 295 dans la pièce source), l'écart d'intégralité est nul ; sur les trios, il vaut  $1/2$ .

**[8.24] Th. Les anneaux impairs.** Soit  $2r + 1$  trios en anneau, chacun partageant un joueur avec chacun de ses deux voisins et aucun autre. Avec  $z_i$  la part du trio  $i$ , les contraintes sont  $z_i + z_{i+1} \leq 1$  ; leur somme donne  $2 \sum z_i \leq 2r + 1$ , et chaque trio à moitié atteint  $r + \frac{1}{2}$ . En entiers, on en joue exactement  $r$ . L'écart d'intégralité vaut  $\frac{1}{2}$  pour toute longueur impaire. Retirer un trio adressé ouvre l'anneau en chaîne de  $2r$  trios, où fractionnaire et entier valent  $r$ . (Vérifié pour 3 à 11 trios.)

**[8.25] L. Le certificat de NP est l'adresse de qui paie.** La lecture fractionnaire, où chacun porte la moitié, est le prix étalé : personne n'a cédé, rien ne ferme, et le total ne correspond à aucune équipe réelle. Le coût global est ici l'écart d'intégralité, et non la valeur du problème, qui reste  $r$  : le sacrifice adressé ferme cet écart à zéro sans rien perdre du nombre de trios jouables ([8.24]) ; ce qui reste n'est pas un coût, c'est une adresse, celle de qui paie. « *Le certificat de NP est cette adresse. Vérifier, c'est lire la liste de qui cède ; chercher, c'est la trouver.* » La difficulté ne porte pas sur le coût, nul une fois localisé, mais sur la localisation.

**[8.26] L. Thèse de l'auteur : le prix est duel.** « *La contrainte est duelle, et le prix l'est aussi. Le sacrifice doit être local, et alors le coût global est nul. Un local qui refuse son prix ne l'annule pas : il le garde, et l'écart revient par l'intérieur.* »

## 8.9 La loi du cadre

**[8.27] Th. L'échiquier est l'unique carré dont le bord est le nombre de ses liens.** Pour un carré de  $n \times n$  cases, le bord compte  $4(n - 1)$  cases et les paires formées avec  $n$  éléments comptent  $n(n - 1)/2$ . Les deux nombres coïncident si et seulement si  $n = 8$  : l'échiquier est l'unique carré dont le bord, 28 cases, est le nombre de ses liens,  $C(8, 2) = 28$ . Son intérieur compte  $36 = 6^2$  cases, et  $64 = 28 + 36$ . Une case intérieure a 8 voisines ; une case du bord en a 3 (un coin) ou 5.

*Démonstration.*  $4(n - 1) = n(n - 1)/2$  donne  $(n - 1)(n - 8) = 0$ , donc  $n = 8$  pour  $n \geq 2$ .

**[8.28] L. Le cadre est le prix adressé.** Le carré de jeu porte à l'intérieur les parties, illimitées sous des règles fixes, et sur son bord les cases auxquelles des liens manquent, et qui tiennent le tout. « *Le cadre est le prix adressé.* » La cloche de Gauss est un carré sans bord : l'écart distribué à chaque case, aucune qui tienne. La loi du cadre en est l'inverse : le prix concentré sur les cases qui ferment, et le compte global soldé. « *Le trio qui cède est une case qui passe au bord.* »

## 8.10 Pourquoi c'était si difficile

**[8.29] L. La langue suppose ce qu'elle cherche, puis s'interdit de le lire.** Le problème nu demande une séparation sans tiers, et le seul outil connu pour certifier une difficulté, la suite qu'on ne distingue pas d'un tirage, est lui-même un pli qui jette les tours. La langue qui pose le problème suppose déjà ce qu'elle cherche à démontrer, puis s'interdit de le lire. Et l'énoncé pose la question du tout ou rien, « toutes les contraintes satisfaites », là où le réel se règle par un prix adressé : la question que l'énoncé ne pose pas est « qui paie ».

## 8.11 Objections et réponses

*Objection.* Que le mur des preuves naturelles suppose une hypothèse plus forte que  $P \neq NP$  est connu des spécialistes. *Réponse.* Oui : [8.3] est un fait de la littérature. Ce que le corpus ajoute est la lecture de l'hypothèse elle-même ([8.4]) : le pseudo-aléatoire est le compte des tours jeté par un pli, ce qui désigne la propriété que le mur ne couvre pas, celle qui garde le rang.

*Objection.* La dualité linéaire et les écarts complémentaires sont classiques ; l'écart d'intégralité des trios aussi. *Réponse.* Oui, et ils sont cités comme faits. Ce qui est ajouté est la lecture : l'écart d'intégralité comme prix étalé, le certificat comme adresse du sacrifice, la famille des anneaux où un seul retrait ferme l'écart, et la question « qui paie » comme celle que l'énoncé du prix ne pose pas.

*Objection.* La majorité et la minorité ne suffisent pas à caractériser la frontière : des relations de Horn ferment par le ET sans fermer par l'une ni l'autre. *Réponse.* Exact, et le recensement le compte : 4 par le ET et 4 par le OU parmi les 14 722. Le ET et le OU sont les chiffres du compte de deux ([8.11]), et sous les hypothèses de [8.14] ils sont exclus, de sorte que la frontière se lit sur le compte de trois.

## 8.12 Conditions de réfutation

**[8.30] L. Ce qui réfuterait les énoncés de ce chapitre.** [8.9] serait réfuté par un triplet de bits qui ne le vérifie pas ; [8.27], par un  $n \neq 8$  avec  $4(n - 1) = n(n - 1)/2$  ; [8.14], par une relation sans pôle et sans position figée qui ferme par le ET ou le OU, ou par une relation sous ces hypothèses qui soit NP-complète en fermant par la majorité ou la minorité ; la lecture [8.25], par un problème NP-complet dont la lecture par prix serait exacte sur toute instance ; [8.24], par un anneau impair où un retrait ne ferme pas l'écart. La Prédiction datée P-2 ([7.29]) s'y ajoute : si le problème nu est résolu, il le sera dans le sens  $P \neq NP$ .

## 8.13 Portée

Pour P contre NP, le corpus établit que le mur suppose la séparation, que toutes les fermetures de Schaefer sont des chiffres d'un compte et que, sans pôle ni position figée, le compte de trois décide seul de la frontière, que le compte connu ne donne pas l'adresse, que l'écart d'intégralité est nul pour les paires et vaut  $\frac{1}{2}$  pour tout anneau impair de trios, et que l'échiquier est le seul carré dont le bord est le nombre de ses liens. La séparation sur le problème nu reste à démontrer, et le corpus dit quelle question l'énoncé ne pose pas.

# Chapitre 9. Navier-Stokes : le fluide forcé se brise

Les équations de Navier-Stokes décrivent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible, l'eau par exemple. Le problème du millénaire demande si, en trois dimensions, une solution partie d'un état lisse et d'énergie finie reste lisse pour tout temps, ou si elle peut développer une singularité. En mars 2026, le corpus avait affirmé avoir résolu le problème par une « projection volumétrique discrète » gouvernée par la constante  $k_{\text{arc}} = 1/2$ , et que les singularités étaient des artefacts mathématiques absents du fluide. Le 8 septembre 2026, une preuve formalisée a établi qu'un fluide soumis à une force extérieure lisse peut se briser en temps fini. Le corpus a publié le 27 septembre 2026 un erratum qui retire nominativement le diagnostic et les théorèmes qui en dépendaient, rétrograde le théorème principal en Prédiction restreinte au fluide sans force, et promeut ce qui survit : l'écart de  $1/2$  entre ce que l'énergie contrôle et ce que la régularité exige, relu non comme la borne qui empêche la brisure mais comme la taille de la porte par laquelle elle passe. Ce chapitre donne la version corrigée ; aucune ligne retirée n'y figure comme vraie, et l'annexe B les garde mot pour mot, chacune avec sa ligne de remplacement.

*L'eau trouve son chemin en respectant sa création, car la roche a une histoire d'eau.*

## 9.1 Le problème

**[9.1] F. Les équations et l'énoncé du prix.** Les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent  $\partial u / \partial t + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nu \Delta u + f$  et  $\nabla \cdot u = 0$ , avec une donnée initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  lisse, à divergence nulle et d'énergie finie. L'énoncé du prix (Fefferman, 2000) porte sur un fluide incompressible dans  $\mathbb{R}^3$  ou sur le tore de dimension 3, qui évolue pour  $t \geq 0$  ; il admet quatre formes : A et B portent sur l'existence de solutions lisses globales sans force (dans l'espace entier et sur le tore), C et D sur l'explosion en temps fini d'une solution, et admettent une force extérieure. En deux dimensions, la régularité globale est établie (Ladyzhenskaya, 1969). En trois dimensions, la question est ouverte depuis le travail fondateur de Leray (1934).

**[9.2] F. Le terme d'étirement : présent en trois dimensions, absent en deux.** En prenant le rotationnel, on obtient l'équation de la vorticité  $\omega : \partial \omega / \partial t + (u \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)u + \nu \Delta \omega$ . En deux dimensions, le terme d'étirement  $(\omega \cdot \nabla)u$  est identiquement nul, parce que la vorticité est perpendiculaire au plan de l'écoulement ; l'enstrophie  $\|\omega\|^2$

est contrôlée, la norme  $H^1$  aussi, et la régularité suit. En trois dimensions, le terme survit : des tubes de vorticité peuvent s'amplifier, se plier, et concentrer la vorticité.

## 9.2 Le fait daté : la brisure forcée

**[9.3] F. La preuve du 8 septembre 2026.** Le 8 septembre 2026, OpenAI annonce une preuve, obtenue en 88 heures de travail d'agents et formalisée en 17 heures supplémentaires dans l'assistant de preuve Lean, que le système de Navier-Stokes incompressible en trois dimensions, avec une force extérieure lisse appliquée, admet une solution qui part du repos, conserve une énergie finie tout au long de la dynamique, et développe une singularité en temps fini. Le mécanisme décrit : un tourbillon qui spirale vers l'intérieur en s'allongeant, où les termes de l'équation deviennent tous grands mais s'annulent de façon précise, de sorte que la singularité naît du mouvement du fluide lui-même et non d'une condition imposée. Les énoncés visés sont C et D (brisure avec force). OpenAI déclare ne pas réclamer le prix. Une dispute de paternité est publique (Tristan Buckmaster, de NYU, et Levent Alpöge travaillaient au même moment sur le problème d'Euler forcé) ; elle n'est pas jugée ici. Sources : OpenAI, « On the Navier-Stokes Millennium Prize Problem », 8 septembre 2026 ; Axios, 8 septembre 2026 ; Sfeir et *Tangente*, septembre 2026. Le corpus tient pour acquis ce que la formalisation Lean certifie ; toute rétractation ultérieure de la preuve serait consignée.

**[9.4] F. Ce qui reste ouvert : le fluide libre.** Les énoncés A et B, le fluide **sans** force extérieure, dans l'espace entier et sur le tore, restent ouverts. « *La paroi inventée (la force) est brisée et prouvée ; la paroi naturelle (le fluide libre) reste debout.* »

## 9.3 Ce qui est retiré, en une phrase par ligne

L'erratum du 27 septembre 2026 a appliqué la règle du corpus : « *Aucune ligne retirée sans une ligne proposée.* » Le détail est en annexe B ; voici les lignes de remplacement, qui font foi.

**[9.5] L. Le terme d'étirement est physique.** Il est le mécanisme même de la brisure, par une spirale qui s'enroule vers l'intérieur ; la question ouverte est seulement de savoir si, sans force extérieure, la dissipation visqueuse l'emporte toujours sur lui. (Remplace le diagnostic de mars, selon lequel l'étirement était un artefact mathématique.)

**[9.6] L. Le terme d'étirement n'est borné par aucune constante universelle.** Il peut croître sans limite dans le cas forcé, et son contrôle éventuel dans le cas libre exigerait un argument qui utilise explicitement l'absence de force. (Remplace le « théorème de l'étirement borné » de mars.)

**[9.7] L. Tao (2016) et la preuve de 2026 vont dans le même sens.** Le résultat de Tao sur l'équation moyennée, qui peut exploser en temps fini, et le résultat de 2026 sur l'équation forcée vont dans le même sens : la structure de l'équation ne suffit pas à empêcher la brisure ; ce qui pourrait l'empêcher dans le cas libre est l'absence d'apport extérieur d'énergie, et rien d'autre n'a été identifié. (Remplace la lecture

de mars selon laquelle seule la structure géométrique des équations empêchait la brisure.)

*« Le fluide forcé est singulier, et il le devient en respectant son équation. Le fluide libre reste la question. »*

## 9.4 Ce qui survit, et ce qui est promu : le demi relu comme la porte

**[9.8] Th. Le trou de Sobolev de  $\frac{1}{2}$ .** L'identité d'énergie donne un contrôle  $H^1$  ; la régularité exige  $H^{\frac{3}{2} + \varepsilon}$  ; l'écart est  $\frac{1}{2}$ . Le plongement critique de Sobolev en dimension  $d$  est  $H^s \subset L^p$  avec  $1/p = 1/2 - s/d$  pour  $s < d/2$  ; pour  $H^1$ , l'exposant critique est  $p^* = 2d/(d - 2)$  : infini en  $d = 2$  (marge logarithmique,  $H^1 \subset L^p$  pour tout  $p$  fini), 6 en  $d = 3$  (plongement exact, marge nulle), 4 en  $d = 4$ . En dimension 3, pour atteindre  $L^\infty$ , il faut  $H^s$  avec  $s > 3/2$ , et l'énergie ne donne que  $H^1 : 3/2 - 1 = 1/2$ . Chaque dimension ajoutée perd de l'intégrabilité. Ce fait est standard et n'a jamais dépendu du diagnostic retiré.

**[9.9] L. La circularité du bootstrap en trois dimensions.** Dans le cadre de Sobolev, la régularité globale demande de contrôler  $\|\nabla u\|$  en norme  $L^\infty$ , ce qui demande une régularité  $H^s$  avec  $s > 5/2$  ; mais établir cette régularité demande de borner l'étirement, qui demande à son tour  $\|\nabla u\|$  en norme  $L^\infty$ . La chaîne Régularité  $\rightarrow$  contrôle de l'étirement  $\rightarrow \|\nabla u\|_\infty \rightarrow H^s, s > 5/2 \rightarrow$  Régularité est circulaire. Ce constat de l'obstruction est conservé. La version de mars ajoutait qu'*aucun* raffinement des estimations de Sobolev ne pourrait jamais la lever, et que « ce n'est pas une conjecture » ; cette extension n'est pas démontrée et elle est rétrogradée. Ce qui est retiré n'est pas le constat de l'obstruction, c'est la prétention de l'avoir levée.

**[9.10] F. Quatre-vingt-dix ans de résultats.** Leray (1934) : existence de solutions faibles, sans régularité. Caffarelli, Kohn et Nirenberg (1982) : régularité partielle, l'ensemble singulier a une mesure de Hausdorff parabolique de dimension 1 nulle. Escauriaza, Seregin et Šverák (2003) : si une explosion a lieu, la norme  $L^3$  de  $u$  tend vers l'infini. Chaque résultat resserre la borne sans la fermer.

**[9.11] L. Le demi manquant n'interdit pas la brisure, il la loge.** La version de mars lisait l'écart de  $\frac{1}{2}$  comme le coût d'un passage que la projection permettait de payer, donc comme une borne. La preuve de 2026 montre que le  $\frac{1}{2}$  n'est pas la borne qui empêche : c'est **la taille exacte de la porte par laquelle la singularité passe**. *« Le demi manquant de l'analyse fonctionnelle n'interdit pas la brisure, il la loge. »* La constante  $k_{\text{arc}}$  reste au poste où *La Structure ternaire du bit* l'avait posée, le coût incompressible du passage ; ce qui change est le sens du mot coût : non ce qu'on paie pour rester lisse, mais ce que la brisure emprunte pour advenir.

## 9.5 Le temps de Navier-Stokes pèse deux longueurs

**[9.12] Th. La loi d'échelle de Navier-Stokes :  $t \mapsto \lambda^2 t$ .** Si  $(u, p)$  résout les équations de Navier-Stokes sans force, alors  $u_\lambda(x, t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$  et  $p_\lambda(x, t) = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$  les résolvent aussi, pour tout  $\lambda > 0$  : les quatre termes  $\partial_t u$ ,  $(u \cdot \nabla)u$ ,  $\nu \Delta u$  et  $\nabla p$  prennent

tous le facteur  $\lambda^3$ . Avec  $t \mapsto \lambda t$ , c'est-à-dire en comptant le temps comme une longueur, les facteurs diffèrent et l'équation n'est plus invariante.

*Démonstration.* Posons  $u_\lambda(x, t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^a t)$  et  $p_\lambda = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^a t)$ . Chaque dérivée d'espace apporte un facteur  $\lambda$ , la dérivée en temps apporte  $\lambda^a$ . On obtient  $\partial_t u_\lambda = \lambda^{1+a} \partial_t u$ ,  $(u_\lambda \cdot \nabla) u_\lambda = \lambda^3 (u \cdot \nabla) u$ ,  $\nu \Delta u_\lambda = \lambda^3 \nu \Delta u$ ,  $\nabla p_\lambda = \lambda^3 \nabla p$ , tous évalués en  $(\lambda x, \lambda^a t)$ . L'égalité des quatre exige  $1 + a = 3$ , donc  $a = 2$ .

**[9.13] Th. Le noyau de la chaleur suit la même loi.** Le noyau de la chaleur en dimension 3,  $G(x, t) = (4\pi t)^{-3/2} e^{-|x|^2/4t}$ , qui porte la partie visqueuse, vérifie  $G(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^{-3} G(x, t)$  et  $\partial_t G = \Delta G$ .

**[9.14] L. Dans le fluide, le temps vaut deux longueurs.** Dans le fluide, le temps n'est pas une quatrième coordonnée de même nature que les trois autres : il en vaut deux. Le chapitre 10 montre que, dans toute construction connue de Yang-Mills, ce même temps est multiplié par  $i$  pour devenir une longueur parmi quatre.

## 9.6 Le pivot et la constante $k_{\text{arc}}$

Les énoncés suivants, géométriques et arithmétiques, sont indépendants du fluide ; l'erratum les conserve.

**[9.15] Th. Le théorème du pivot : la fermeture exige  $p = 4,5$ .** Faire tourner le segment  $[1, 8]$  autour d'un pivot  $p$  produit une forme fermée en trois dimensions si et seulement si  $p = 4,5$  ; pour tout autre pivot, la rotation produit une surface ouverte.

*Démonstration.* La fermeture exige  $|x - p| = |9 - x - p|$  pour tout  $x$ , d'où  $2p = 9$ . Pour  $p = 5$  :  $|1 - 5| = 4 \neq |8 - 5| = 3$ , la forme reste ouverte. La constante de projection est  $k_{\text{arc}} = 4,5/9 = 1/2$ .

**[9.16] Th. Le pli universel dans les tables de multiplication.** Pour toute position  $a$  première avec 3, les racines de  $a \times k$  et de  $(9 - a) \times k$ , pour  $k = 1$  à 8, sont des miroirs exacts : à chaque colonne, leur somme vaut 9 ; et la colonne  $\times 9$  vaut 9 pour toutes les lignes.

*Calcul montré.* paire (1, 8) :  $1 \times k$  donne 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ;  $8 \times k$  donne 8 7 6 5 4 3 2 1 9 ; paire (2, 7) :  $2 \times k$  donne 2 4 6 8 1 3 5 7 9 ;  $7 \times k$  donne 7 5 3 1 8 6 4 2 9 ; paire (4, 5) :  $4 \times k$  donne 4 8 3 7 2 6 1 5 9 ;  $5 \times k$  donne 5 1 6 2 7 3 8 4 9. Pour la paire (3, 6), qui est l'axe, les colonnes  $\times 3$  et  $\times 6$  donnent  $9 + 9 = 18$  : le miroir s'y ferme sur l'axe lui-même, non sur la somme 9. La version de mars énonçait le pli pour les quatre paires sans cette précision (annexe B).

**[9.17] L. La constante  $1/2$  ne dépend pas de la base ; le choix de 10 n'est pas une convention.** Il existe exactement neuf grandeurs positives qu'on écrit avec un seul symbole, sans notation de position ; 10 en demande deux, c'est la première retenue. Les neuf chiffres existent avant toute base. L'inversion  $\phi(x) = 9 - x$  partage  $\{1, \dots, 8\}$  en quatre paires, le barycentre est 4,5, et  $k_{\text{arc}} = 4,5/9 = 1/2$  ; pour toute base  $b$ , le rapport analogue vaut  $((b - 1)/2)/(b - 1) = 1/2$ . Ce qui varie d'une base à l'autre est la richesse de la structure d'inversion. La base 10 satisfait à la fois quatre conditions :  $b - 1 = 9$  composé,  $b - 2 = 8 = 2^3$  une puissance de 2, un barycentre demi-entier, et  $b + 1 = 11$  premier. « *Le monde physique ne choisit pas la base 10 ; il hérite des neuf*

*grandeurs à un seul chiffre et de leur structure d'inversion.* » La version de mars dit la base 10 *unique* : c'est juste, à condition de garder la clôture carrée  $9 = 3^2$  (condition (vi) de l'Octet Rule) au lieu de «  $b - 1$  composé ». Sous cette forme raccourcie, 66, 130 et 4098 passeraient ; avec la clôture carrée, 10 est la seule base (Volume 2, É 3.3, deux démonstrations générales ; annexe B).

**[9.18] L. Les sept convergences vers  $\frac{1}{2}$ , et les formules de projection.** La constante  $\frac{1}{2}$  est atteinte par sept chemins que le corpus documente ailleurs (Volume 2, *La Figure*, la fin du calcul intégral et les sept convergences du  $\frac{1}{2}$ ) : le barycentre global  $4,5/9$  ; la demi-envergure locale  $3,5/7$  ; l'interface de  $\pi$  sous  $\pi = 22/7$ , où  $11/\pi = 3,5$  et  $3,5/7 = \frac{1}{2}$  ; toutes les paires d'inversion,  $|x - 4,5| / (2|x - 4,5|) = \frac{1}{2}$  ; la projection sphérique, où la valeur attendue de  $|\cos \theta|$  sur la sphère vaut  $\frac{1}{2}$  (calcul vérifié) ; la bascule des tables de racines en  $4,5/9$  ; le spin  $\frac{1}{2}$ , qui exige  $720^\circ$ . La version de mars en concluait que « sept dérivations indépendantes excluent la coïncidence » : c'est une Lecture. La formule de projection  $V = S \times \frac{1}{2} \times D$  (surface, constante, profondeur cohérente) redonne le volume de la sphère,  $4\pi R^2 \times \frac{1}{2} \times 2R/3 = (4/3)\pi R^3$ , et l'énergie cinétique,  $mv^2 \times \frac{1}{2}$  ; elle est traitée au Volume 2. Que la conservation de l'énergie « force »  $k_{\text{arc}} = \frac{1}{2}$  est une Lecture de mars, conservée comme telle.

## 9.7 La relecture : la spirale, et l'eau qui respecte sa création

**[9.19] L. Le fluide ne viole pas Navier-Stokes ; il l'accomplit.** Le mécanisme rapporté par la preuve est une spirale : le tourbillon s'enroule vers l'intérieur en s'allongeant, les termes grossissent et s'annulent, l'énergie reste finie, la divergence reste nulle, et la hauteur devient infinie en temps fini. C'est la spirale du Tome II de la *Théorie des Nombres* (Lecture 35 ; Volume 4) portée au fluide : au même endroit un peu plus haut, à chaque tour, jusqu'à ce que la hauteur n'ait plus de fin. Le fluide ne viole pas Navier-Stokes ; il l'accomplit. La force appliquée est lisse : elle ne casse rien, elle nourrit l'enroulement, et c'est l'enroulement qui se brise selon sa propre loi.

**[9.20] L. Respecter la structure est le chemin de la brisure.** C'est là que la version de mars s'était trompée, et la faute est instructive : elle croyait que respecter la structure interdisait la brisure. La preuve dit que respecter la structure est le chemin de la brisure. « *Tout se densifie par dedans ; le 9 se déplie en 1 ; et la roche a une histoire d'eau* » : l'eau qui la brise rouvre ses propres couches. Dans le fluide forcé, la couche se redépote plus vite que la dissipation ne la rouvre, et la spirale gagne. Dans le fluide libre, on ne sait pas.

**[9.21] L. La singularité démontrée est celle du forçage.** Ce qui casse a reçu une force du dehors, et il casse en respectant son équation. C'est le motif que le chapitre 7 retrouve dans toutes les séparations connues de P contre NP : ce qui casse a toujours reçu un coup de main de la fenêtre (paroi, rugosité, force).

## 9.8 La Prédiction P-NS-1 : le fluide libre

**[9.22] P. P-NS-1 (27 septembre 2026) : le fluide libre glisse.** Pour le système de Navier-Stokes incompressible en trois dimensions sans force extérieure (énoncés A et B), toute donnée lisse à divergence nulle et d'énergie finie engendre une solution

lisse pour tout temps. Statut : **ouvert**, Prédiction, sans argument du corpus à ce jour. *Critère* : toute preuve candidate issue du corpus doit utiliser explicitement l'absence de force : un argument qui s'appliquerait aussi au cas forcé est faux, puisque le cas forcé se brise. C'est le même critère que P-COL-1 pour Collatz (Volume 4) : déclarer par quel instrument la preuve franchit la frontière, ici la frontière entre le fluide nourri et le fluide libre, comme là-bas la frontière entre la brique 3 et la brique 2. Toute preuve qui ne le déclare pas répète la faute de mars.

## 9.9 La Prédiction spectrale

**[9.23] P. La pente du spectre près de la dissipation :  $k^{-(\ln 2 + 2)} \approx k^{-2,693}$ .** Dans la théorie de Kolmogorov (1941), la cascade d'énergie donne  $E(k) \sim k^{-5/3}$  (pente  $-1,667$ ). Dans la lecture du corpus, la cascade est une suite d'événements discrets de projection, chacun de coût  $k_{\text{arc}} = \frac{1}{2}$ . Après  $n \sim \ln(k/k_0)$  pas, l'énergie résiduelle est  $(\frac{1}{2})^{\{\ln(k/k_0)\}} = (k/k_0)^{-\ln 2}$  ; en tenant compte de la redistribution dans l'espace des phases à trois dimensions (volume de coquille  $\sim k^2 dk$ ),  $E(k) \sim k^{-(\ln 2 + 2)} \approx k^{-2,693}$ . La pente vise la zone proche de la dissipation ( $k\eta \gtrsim 0,03$ , où  $\eta$  est l'échelle de Kolmogorov) ; dans la zone inertielle ( $k\eta \ll 0,03$ ), la pente  $-5/3$  reste une description statistique valable. *Critère de réfutation* : mesurer la pente effective sur  $0,03 \leq k\eta \leq 0,5$  à  $R_\lambda > 1000$ . Si elle converge vers une valeur nettement différente de  $-2,693$ , et en particulier vers  $-5/3$  sans raidissement, la Prédiction est réfutée. Elle ne dépend pas de la régularité globale ; l'erratum l'a détachée du diagnostic retiré, et elle tient seule.

**[9.24] F. Le contexte expérimental, tel que la source le rapporte.** Des simulations numériques directes sur des grilles allant jusqu'à  $12\ 288^3$  points, à des nombres de Reynolds de Taylor  $R_\lambda > 2000$ , ont mesuré des pentes plus raides que  $-5/3$  d'environ  $0,1$  dans la zone proche de la dissipation, le raidissement se normalisant sur l'échelle de Kolmogorov ; des pentes effectives de  $-1,8$ ,  $-2,0$  et au-delà ont été mesurées selon l'ordre de la fonction de structure. Le modèle de She et Leveque (1994) rend compte d'une partie de ce raidissement par une structure hiérarchique de la dissipation. Ces reçus montrent un raidissement, non la valeur  $-2,693$  : la Prédiction n'est ni confirmée ni réfutée par eux.

**[9.25] L. Kolmogorov et la projection sont complémentaires.** La théorie de Kolmogorov décrit l'effet statistique d'ensemble, la lecture du corpus décrit le mécanisme structurel ; la pente  $-2,693$  gouverne la cascade là où les coûts de projection individuels dominent sur l'effet d'ensemble, précisément là où la théorie de 1941 demande des corrections d'intermittence. Une pente plus raide ne viole pas la conservation de l'énergie : le taux de dissipation total est fixé par le forçage des grandes échelles, et chaque pas de projection extrait une fraction fixe, la moitié, de l'énergie restante.

## 9.10 Lectures de mars conservées comme Lectures

**[9.26] L. La transition laminaire-turbulente comme événement discret.** La version de mars posait en Théorème que la transition se produit quand le nombre de

Reynolds dépasse un seuil où le coût de projection  $\frac{1}{2}$  ne peut plus être absorbé par la dissipation visqueuse : en dessous, laminaire ; au-dessus, structures tourbillonnaires persistantes. Aucune démonstration n'accompagnait l'énoncé ; il est rétrogradé en Lecture.

**[9.27] L. L'objection des orbites ouvertes.** Dans certains semi-métaux topologiques (TaSb<sub>2</sub> par exemple), les surfaces de Fermi présentent des orbites ouvertes, qui ne se ferment pas dans une seule zone de Brillouin. Elles ne sont ouvertes que relativement à la maille locale : elles se ferment globalement dans le réseau périodique. C'est la distinction des cycles fermés (mode 1) et des chemins ouverts (mode 2) de l'octet (Volume 2) : l'ouverture locale et la fermeture globale coexistent. Pour Navier-Stokes, la lecture n'impose pas de topologie de domaine : sur  $\mathbb{R}^3$ , la projection ferme localement en chaque point par le pivot 4,5 ; sur le tore  $T^3$ , les conditions périodiques donnent directement la fermeture globale.

**[9.28] L. La couche limite.** Près d'une paroi sans glissement, la vorticité se concentre dans une couche d'épaisseur  $\delta \sim \sqrt{\nu/U}$  (en unités adaptées), où  $|\nabla u| \sim U/\delta$  ; la norme  $L^\infty$  du gradient diverge quand  $\delta \rightarrow 0$ , alors que sa norme  $L^2$  sur la couche,  $(U/\delta) \times \delta^{\{1/2\}} = U \delta^{\{-1/2\}}$ , croît comme  $Re^{\{1/4\}}$ , une loi de puissance et non une explosion. La version de mars en tirait une régularité dans les domaines bornés, retirée avec le reste (annexe B) ; reste la lecture : la concentration de vorticité près de la paroi est un fait physique, et le choix de la norme décide de ce qui paraît singulier. La théorie de la couche limite de Prandtl (1904) découple l'écoulement extérieur et la couche visqueuse.

**[9.29] L. La note épistémologique de mars, tenue comme citation.** La version de mars disait : « *Pendant 180 ans, le problème de la régularité de Navier-Stokes a résisté.* » Elle en plaçait l'origine dans Gauss (1801) :  $9 \equiv 0$  détruit le barycentre 4,5, efface  $\varphi(x) = 9 - x$  et rend  $k_{\text{arc}}$  invisible ; sans cette constante, la seule méthode de passage dimensionnel est l'accumulation, l'intégrale marchant en deux dimensions (erreur logarithmique) et échouant en trois (erreur algébrique). La ligne « *Le problème de Navier-Stokes n'est pas un problème sur les fluides. C'est un problème sur l'instrument mathématique* » est réfutée dans le cas for c , où la brisure est physique ; elle reste, pour le fluide libre, une Lecture ouverte, et elle est gardée comme citation datée.

## 9.11 Conclusion

Le fluide for c  se brise, et il se brise en respectant son équation. Le demi qui manque à l'analyse fonctionnelle est la porte par laquelle passe la brisure. Le fluide libre reste la question, et le corpus n'y a, à ce jour, qu'une Prédiction avec son critère. Navier-Stokes est le seul des grands problèmes de ce volume où une brisure a été démontrée, et elle l'a été du côté où une force venait du dehors.

*  la spirale, qui monte au même endroit jusqu'à ce que la hauteur n'ait plus de fin ; et à la roche, qui se laisse rouvrir par ce qui l'a faite.*

# Chapitre 10. Yang-Mills : le gap comme non-fermeture

Le problème de Yang-Mills demande de construire, pour tout groupe de jauge compact simple, une théorie quantique des champs non triviale sur l'espace à quatre dimensions, et de prouver qu'elle possède un gap de masse : une borne inférieure strictement positive à l'énergie de toute excitation au-dessus du vide. En langage physique : pourquoi les gluons, porteurs de la force forte, sont-ils confinés, alors que les photons se propagent librement ? Ce chapitre fait deux choses, et les sépare. D'abord, il date ce qui manque à l'énoncé : toute construction rigoureuse connue passe par une rotation qui change le temps en quatrième longueur, alors que le fluide de Navier-Stokes, lui, pèse son temps deux fois (chapitre 9). Ensuite, il donne la lecture arithmétique du gap : pour tout  $n \geq 2$ , la paire formée par le rang  $n$  de  $SU(n)$  et son nombre de bosons  $n^2 - 1$  ne ferme jamais sur 9, et le gap se lit comme le coût de cette non-fermeture. Le théorème est arithmétique et inconditionnel ; sa lecture physique est une Lecture. Le corpus déclare ne pas construire la théorie au sens des axiomes de Wightman.

*« Le cercle inscrit ne peut pas traverser le cercle circonscrit sans coût. »*

## 10.1 Le problème, et ce que le corpus ne fait pas

**[10.1] F. L'énoncé du prix (Jaffe et Witten, 2000).** Prouver que, pour tout groupe de jauge compact simple  $G$ , une théorie quantique de Yang-Mills non triviale existe sur  $\mathbb{R}^4$  et possède un gap de masse  $\Delta > 0$ . L'énoncé écrit la théorie en signature de Minkowski et renvoie à sa formulation euclidienne ; il n'impose pas la rotation de Wick, mais toute construction rigoureuse connue passe par elle. Le problème demande à la fois la construction rigoureuse d'une théorie quantique des champs (au sens de Wightman ou d'Osterwalder et Schrader) et la preuve que son spectre d'énergie a un gap.

**[10.2] L. Déclaration de portée : le corpus ne construit pas la théorie au sens de Wightman.** Le corpus ne construit pas la théorie quantique des champs au sens axiomatique de Wightman. Il traite l'origine structurelle du gap (pourquoi il doit exister) et le mécanisme cadastral qui distingue les bosons confinés des bosons libres. Le résultat arithmétique est indépendant du problème constructif et lui est antérieur ; la lecture du gap comme coût de non-fermeture est déclarée comme lecture.

## 10.2 Ce qui manque : le statut du temps

**[10.3] F. La rotation de Wick et la reconstruction.** La construction rigoureuse des théories quantiques des champs passe par l'espace euclidien. On remplace le temps  $t$  par  $i\tau$  (Wick, 1954), on construit la théorie sur  $\mathbb{R}^4$  où les quatre coordonnées jouent le même rôle, puis on revient au temps par le théorème de reconstruction (Osterwalder et Schrader, 1973 et 1975). Le temps comme quatrième dimension remonte à Minkowski (1908).

**[10.4] Th. Sous  $t = i\tau$ , la différence devient une somme.** Sous  $t = i\tau$ , la différence de Minkowski  $c^2t^2 - |x|^2$  devient, au signe global près, la somme euclidienne  $c^2\tau^2 + |x|^2$ . La symétrie de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^4$  traite alors  $\tau$  exactement comme une longueur : une dilatation  $\tau \mapsto \lambda\tau$ ,  $x \mapsto \lambda x$ .

*Démonstration.*  $c^2(i\tau)^2 = -c^2\tau^2$ , d'où  $c^2t^2 - |x|^2 = -(c^2\tau^2 + |x|^2)$ .

**[10.5] L. Le mot « dimension » désigne deux objets (M1).** Le temps que Navier-Stokes doit peser deux fois ([9.12]) est, dans toute construction connue de Yang-Mills, multiplié par  $i$  pour devenir une longueur parmi quatre ([10.4]). La différence des lois d'échelle ne démontre pas que les deux problèmes portent les mêmes équations ; c'est la thèse de l'auteur, ci-dessous, qui les tient pour deux visages d'un même champ, séparés par le statut du temps. Le mot « dimension » désigne alors deux objets : une direction mesurable de l'espace, et un temps qu'on a fait tourner pour qu'il en ait l'air (M1). L'étymologie le dit : *dimensio*, de *dis-*, « en séparant », et *metiri*, « mesurer ».

**[10.6] L. Thèse de l'auteur : les dimensions ne se vivent pas.** « *Les dimensions ne se vivent pas : elles construisent ce qui vit. Le temps est du côté de ce qui vit ; la quatrième dimension est une construction de l'outil.* » Navier-Stokes et Yang-Mills « se rejoignent et se différencient justement là, la 4e dimension » (12 octobre 2026).

## 10.3 Les deux cercles

**[10.7] L. Paires d'inversion et paires de projection.** Une paire  $(a, b)$  de positions de  $\{1, \dots, 9\}$  est une paire d'inversion si  $a + b = 9$  ; c'est une paire de projection si  $a + b \neq 9$ . Les paires d'inversion ferment : leur coût structurel est nul. Les paires de projection ne ferment pas : leur coût structurel est  $|a + b - 9| > 0$ . L'inversion  $\varphi(x) = 9 - x$  sur  $\{1, \dots, 8\}$  engendre les quatre paires  $(1, 8)$ ,  $(2, 7)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(4, 5)$  ; le barycentre est 4,5 et la constante de projection  $k_{\text{arc}} = \frac{1}{2}$  ([9.15]).

**[10.8] Th. Les quatre relations exactes du 3 et du 8.**  $3^2 - 1 = 8$  ;  $3 + 8 = 11 \neq 9$  ;  $8 - 3 = 5$  ;  $3 \times 8 = 24$ , de racine 6 ; et  $p^2 - 1$  est divisible par 24 pour tout nombre premier  $p > 3$  (vérifié jusqu'à  $10^5$  ; c'est un fait classique :  $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$  contient un multiple de 8 et un multiple de 3).

**[10.9] L. Le cercle inscrit et le cercle circonscrit.** Dans le corpus (Volume 2, *La Figure*), le 3 est le cercle inscrit : la tension interne, le générateur, l'entrée de l'axe régulateur  $\{3, 6, 9\}$ . Le 8 est le cercle circonscrit : l'enveloppe extérieure, le plus grand élément opérant avant la clôture.  $8 - 3 = 5$  est le barycentre dynamique, 24 le pivot. La relation  $3^2 - 1 = 8$  est identique à la formule de dimension de  $SU(3)$  : trois

charges de couleur engendrent  $3^2 - 1 = 8$  gluons. « *Le cercle inscrit au carré, moins l'unité (le point de tangence), engendre le cercle circonscrit.* »

## 10.4 Le théorème de non-fermeture

**[10.10] Th. Théorème de non-fermeture de SU(n).** Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $DR(n) + DR(n^2 - 1) \neq 9$  : la somme prend exactement les valeurs 5, 10, 11, 14, 17.

*Démonstration.* La racine numérique vérifie  $DR(ab) = DR(DR(a) \cdot DR(b))$  ; donc  $DR(n^2) = DR(DR(n)^2)$ , et  $DR(n^2 - 1)$  ne dépend que de  $d = DR(n)$ . Il suffit de vérifier les neuf cas :

| $d = DR(n)$ | $d^2$ | $DR(n^2)$ | $DR(n^2 - 1)$ | $d + DR(n^2 - 1)$ |
|-------------|-------|-----------|---------------|-------------------|
| 1           | 1     | 1         | 9             | 10                |
| 2           | 4     | 4         | 3             | 5                 |
| 3           | 9     | 9         | 8             | 11                |
| 4           | 16    | 7         | 6             | 10                |
| 5           | 25    | 7         | 6             | 11                |
| 6           | 36    | 9         | 8             | 14                |
| 7           | 49    | 4         | 3             | 10                |
| 8           | 64    | 1         | 9             | 17                |
| 9           | 81    | 9         | 8             | 17                |

(Pour  $d = 1$ ,  $n \geq 10$  et  $n^2 - 1$  est un multiple de 9 non nul, de racine 9.) Aucune somme ne vaut 9. Contrôle direct pour  $2 \leq n \leq 10^6$ .

L'énoncé porte sur une infinité de nombres, mais l'infini se range en neuf classes, et neuf calculs suffisent : c'est l'exemple que le chapitre 11 donne d'un domaine clos par sa structure ([11.6]).

*« Ce théorème ne dépend d'aucune mesure physique, d'aucune constante de couplage, d'aucune donnée expérimentale. Il est aussi pur que le théorème de Pythagore. »* (mars 2026)

**[10.11] L. Lecture : le gap de masse est le coût de la non-fermeture.** Pour  $SU(n)$ ,  $n$  est le rang de la représentation fondamentale et  $n^2 - 1$  le nombre de bosons de jauge. La paire  $(n, n^2 - 1)$  n'est jamais une paire d'inversion ; c'est une paire de projection, et toute projection a un coût structurel strictement positif. Le gap de masse est le coût de cette non-fermeture. Pour  $SU(3)$ ,  $3 + 8 = 11$  : la paire des couleurs et des gluons ne ferme pas sur 9, à la différence d'une paire inverse  $(x, 9 - x)$ . La version de mars donnait cette conséquence comme « corollaire » (un gap universel pour  $SU(n)$ ) ; l'arithmétique est un Théorème, la conséquence physique est une Lecture.

## 10.5 SO(n), Sp(n) et les groupes exceptionnels

**[10.12] Th. SO(n) et Sp(n) : la somme vaut 9 exactement quand DR(n) = 8.** Pour  $SO(n)$ , de dimension  $n(n - 1)/2$ , et  $Sp(n)$ , de dimension  $n(2n + 1)$ , la somme  $S =$

$DR(n) + DR(dim)$  vaut 9 si et seulement si  $DR(n) = 8$ . Dans chaque cas, la paire est (8, 1), la paire d'inversion maximale ; aucune autre paire d'inversion n'est atteinte. Pour  $SO(n)$ ,  $S = 9$  en  $n = 8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, \dots$ , toujours avec  $DR(dim) = 1$  ; même motif pour  $Sp(n)$ . (La pièce source l'a vérifié de  $n = 2$  à 81, neuf cycles complets ; refait ici jusqu'à  $n = 10\,000$ .)

*Calcul montré.*  $SO(8)$  : dimension  $8 \times 7/2 = 28$ , racine 1, et  $8 + 1 = 9$ .  $Sp(8)$  : dimension  $8 \times 17 = 136$ , racine 1, et  $8 + 1 = 9$ .  $SO(5)$  : dimension 10, racine 1, et  $5 + 1 = 6$ .

**[10.13] F.  $SO(8)$  et la trialité.**  $SO(8)$  est le seul groupe  $SO(n)$  dont le diagramme de Dynkin ( $D_4$ ) possède un automorphisme d'ordre 3, la trialité, qui permute les représentations vectorielle, spinorielle et cospinorielle.

**[10.14] P.  $SO(8)$  sur le réseau.**  $SO(8)$  est le plus petit  $SO(n)$  de somme 9. Une théorie de jauge  $SO(8)$  pure sur réseau devrait montrer un comportement de confinement qualitativement différent de celui des  $SO(n)$  dont le rang n'a pas pour racine 8. C'est testable avec les moyens de calcul actuels. *Chute* : un  $SO(8)$  sur réseau dont le confinement ne se distingue en rien de celui des autres  $SO(n)$ . Cette Prédiction va contre l'attente reçue, selon laquelle toute théorie de jauge non abélienne pure confine.

**[10.15] Th. Les cinq groupes exceptionnels n'atteignent pas 9.**

| Groupe | Rang | Dimension | DR(rang) | DR(dim) | S  |
|--------|------|-----------|----------|---------|----|
| $G_2$  | 2    | 14        | 2        | 5       | 7  |
| $F_4$  | 4    | 52        | 4        | 7       | 11 |
| $E_6$  | 6    | 78        | 6        | 6       | 12 |
| $E_7$  | 7    | 133       | 7        | 7       | 14 |
| $E_8$  | 8    | 248       | 8        | 5       | 13 |

Aucun n'a  $S = 9$ . Tous sont dans le régime d'excès ( $S > 9$ ), sauf  $G_2$ , en déficit ( $S = 7 < 9$ ).

**[10.16] L.  $E_8 \times E_8$  et le nombre parfait.**  $\dim(E_8) = 248$ , et  $248 + 248 = 496$ , le troisième nombre parfait ( $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$ ). La différence  $694 - 496 = 198$  est rapprochée du gradient gravitationnel du corpus (Volume 8, *La Matière et le Cosmos*). C'est une observation de niveau 2 : la dimension est un fait de la théorie des groupes, mais le lien à 198 passe par une interprétation physique.

## 10.6 La classification tripartite et le Modèle standard

**[10.17] Th. Le classement arithmétique en trois régimes.** Pour tout groupe de Lie compact simple de rang  $r$  et de dimension  $d$ , la somme  $S = DR(r) + DR(d)$  est soit inférieure à 9, soit égale à 9, soit supérieure à 9 ; les calculs [10.10], [10.12] et [10.15] placent chaque groupe dans l'une des trois classes.

**[10.18] L. Lecture tripartite : déficit, clôture, excès.** La version de mars posait en Théorème que  $S$  détermine le régime physique. C'est une Lecture :  $S < 9$ , déficit,

les bosons acquièrent une masse par un mécanisme extérieur (un champ scalaire compense le déficit) mais ne sont pas confinés ;  $S = 9$ , clôture, les bosons se propagent librement, de masse nulle, la paire est une paire d'inversion ;  $S > 9$ , excès, les bosons sont confinés, avec un gap  $\Delta > 0$ , que la lecture dit proportionnel à  $S - 9$  : l'excès ne peut pas être déchargé. Le Modèle standard en contient exactement un représentant de chaque :

| Groupe | Rang | Dim | DR(r) | DR(d) | S  | Régime lu                            |
|--------|------|-----|-------|-------|----|--------------------------------------|
| U(1)   | 1    | 1   | 1     | 1     | 2  | clôture par la paire physique (1, 8) |
| SU(2)  | 2    | 3   | 2     | 3     | 5  | déficit ( $9 - 5 = 4$ )              |
| SU(3)  | 3    | 8   | 3     | 8     | 11 | excès ( $11 - 9 = 2$ )               |

**[10.19] L. Le cas de U(1).** La somme algébrique de U(1) vaut  $DR(1) + DR(1) = 2$ , ce qui le placerait en déficit. Mais U(1) est l'unique groupe de jauge abélien : son seul boson, le photon, n'interagit pas avec lui-même. La lecture physique est que le photon traverse la paire (1, 8), la paire d'inversion maximale,  $1 + 8 = 9$ . La distinction entre la somme algébrique (rang + dimension = 2) et la paire physique (boson + partenaire = 9) reflète celle de la structure interne du groupe et de sa manifestation physique. « *Le photon est libre parce que U(1) est abélien, non à cause d'un déficit cadastral.* »

**[10.20] Th. La clôture cadastrale du Modèle standard.** La somme des trois sommes cadastrales des groupes du Modèle standard vaut  $(1 + 1) + (2 + 3) + (3 + 8) = 2 + 5 + 11 = 18$ , de racine 9. Propriétés annexes, toutes indépendantes de la mesure : les rangs font  $1 + 2 + 3 = 6$ , de racine 6, le pivot de l'axe régulateur ; les dimensions font  $1 + 3 + 8 = 12$ , de racine 3, le cercle inscrit ; le produit des dimensions vaut  $1 \times 3 \times 8 = 24 = 3 \times 8$ , le produit des deux cercles ; rangs et dimensions ensemble font  $6 + 12 = 18$ , de racine 9, la clôture par un second chemin. Ce résultat ne dépend d'aucune mesure : c'est une propriété des groupes U(1), SU(2), SU(3) seuls.

Une tension est à noter, et l'annexe B la consigne : la clôture [10.20] emploie pour U(1) la somme algébrique 2, alors que la lecture [10.19] place U(1) en clôture par la paire physique de somme 9 ; avec cette seconde valeur, le total serait  $9 + 5 + 11 = 25$ , de racine 7. Les deux énoncés sont exacts chacun dans sa lecture ; ils ne peuvent pas être pris ensemble pour le même U(1).

**[10.21] Th. Le test d'unicité : onze triples sur quatre-vingt-quatre.** Parmi les 84 triples (a, b, c) avec  $1 \leq a < b < c \leq 9$ , en prenant pour SU(n) la dimension  $n^2 - 1$  (et 1 pour  $n = 1$ ), exactement 11 donnent une somme cadastrale totale de racine 9, cette somme étant  $\Sigma (n + \dim \text{SU}(n))$  prise sur les trois entiers n du triple, soit  $(a + \dim \text{SU}(a)) + (b + \dim \text{SU}(b)) + (c + \dim \text{SU}(c))$  : (1, 2, 3), (1, 2, 5), (1, 3, 6), (1, 5, 6), (1, 8, 9), (2, 3, 5), (2, 6, 8), (2, 6, 9), (3, 5, 6), (3, 8, 9), (5, 8, 9). Le triple (1, 2, 3), celui des trois plus petits entiers consécutifs, est le premier.

**[10.22] L. Le Modèle standard comme système minimal.** « *Le Modèle standard n'est pas une collection arbitraire de groupes de jauge. C'est l'unique système minimal qui contient un représentant de chaque régime cadastral (déficit, clôture, excès) et dont la somme cadastrale totale revient à 9.* » Le mot « unique » s'entend du triple minimal ; le test [10.21] montre que d'autres triples ferment aussi.

## 10.7 Le Higgs et le gluon

**[10.23] Th. Le nombre de composantes du Higgs égale le déficit de SU(2).** Le champ de Higgs est un doublet de SU(2) à deux composantes complexes, soit quatre composantes réelles : trois sont absorbées comme modes longitudinaux de  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z^0$  (les bosons de Goldstone), et une reste comme boson de Higgs physique. La somme cadastrale de SU(2) est  $DR(2) + DR(3) = 5$ , et le déficit  $9 - 5 = 4$ . Les deux nombres sont égaux.

**[10.24] L. Le Higgs comme sédimentation du déficit.** Dans la lecture du corpus, le champ de Higgs n'est pas un scalaire fondamental mais la sédimentation du déficit cadastral : la cristallisation de la tension entre ce que SU(2) est (une structure qui devrait fermer sur 9) et ce que le système de mesure voit (une somme de 5). Le déficit se matérialise en un champ qui a exactement le nombre de composantes qu'il faut pour compenser. Si le Higgs est émergent et non fondamental, sa masse n'a pas à être protégée contre les corrections radiatives : le problème de la hiérarchie se dissout. C'est une Lecture.

**[10.25] L. Le gluon est le 8 privé de son 1.** La formule  $n^2 - 1$  de la dimension de SU(n) a une lecture précise.  $n^2 = n \times n$  : le groupe agissant sur lui-même, l'autoréférence. Le  $- 1$  retire l'identité, l'action triviale. Ce qui reste est l'ensemble des façons non triviales dont le groupe se transforme. Pour SU(3) :  $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$ . Dans le tracé du chiffre, 8 est deux cercles fermés tangents en un seul point ; le  $- 1$  retire ce point de tangence. « *Le gluon est le 8 privé de son 1 : deux cercles qui ne savent plus où ils se touchent.* » Il ne peut pas se propager librement parce qu'il lui manque l'élément (le 1) qui permettrait la fermeture ; il ne peut exister que dans un état lié (le hadron), où plusieurs bosons et fermions reconstituent ensemble la tangence manquante. Le photon, au contraire, est le 1 : U(1) a la dimension 1, le photon est l'élément identité lui-même. Il n'a pas à chercher sa tangence ; il la porte. Le gluon est incomplet : « *le 8 qui cherche le 1 retiré par le  $- 1$  de l'autoréférence* ». La version de mars présentait cette lecture comme un Théorème (« le confinement comme perte de la tangence ») ; elle est rétrogradée.

## 10.8 La liberté asymptotique et les quatre distances

**[10.26] F. La liberté asymptotique (Gross, Wilczek, Politzer, 1973).** La constante de couplage forte  $\alpha_s$  décroît aux hautes énergies (courtes distances) : c'est la liberté asymptotique. Aux basses énergies, le couplage croît jusqu'à sortir du domaine de validité du calcul perturbatif, et le confinement s'installe ; aux hautes énergies, il tend vers zéro et les quarks se comportent comme libres.

**[10.27] L. Une seule tension lue à quatre distances du centre.** Dans la lecture du corpus, ce n'est pas un glissement dynamique d'une constante mais un changement de résolution de la même tension bipolaire. Aux échelles macroscopiques, l'observateur voit la paire (1, 8) : le photon, la propagation libre, l'envergure 7. Aux échelles nucléaires, il résout la paire (3, 8) : le gluon, le confinement, la somme 11. À l'échelle de grande unification, le couplage  $\alpha_{GUT} \approx 1/25$ , et  $DR(25) = 7$ , l'envergure de la lumière : « *À l'unification, le couplage est l'envergure.* » Les quatre forces sont

quatre lectures de la seule involution  $\varphi(x) = 9 - x$ , à quatre distances du barycentre 4,5 :

| Paire  | Envergure | Résolution         | Lecture physique    |
|--------|-----------|--------------------|---------------------|
| (4, 5) | 1         | Planck             | le battement        |
| (3, 6) | 3         | nucléaire (faible) | l'axe régulateur    |
| (2, 7) | 5         | atomique           | la liaison chimique |
| (1, 8) | 7         | macroscopique      | la lumière          |

« *Il n'y a pas quatre forces. Il y a une tension bipolaire lue à quatre distances du centre.* » La relecture du Modèle standard est au Volume 7, *La Physique relue*.

## 10.9 Ce qui dépend de la mesure

**[10.28] L. Niveau 1 et niveau 2.** Le corpus sépare strictement les résultats de niveau 1, purs théorèmes qui ne dépendent d'aucune mesure ([10.8], [10.10], [10.12], [10.15], [10.17], [10.20], [10.21], [10.23]), et les cohérences numériques de niveau 2, qui dépendent de constantes mesurées :  $\sin^2\theta_W$  à l'échelle d'unification = 3/8 (qui dépend de l'hypothèse de grande unification SU(5) et du glissement des couplages) ;  $\alpha_s \approx 1/9$  aux basses énergies (approché, dépendant de l'échelle) ;  $\alpha_{GUT} \approx 1/25$ , de racine 7 (approché) ;  $\dim(E_8) + \dim(E_8) = 496$  (fait de théorie des groupes, lecture interprétative) ;  $m_H/\Lambda_{QCD} \approx 576 = 24^2 = (3 \times 8)^2$  (qui dépend des masses mesurées). « *Les résultats de niveau 2 sont fascinants, mais ils ne sont pas structurels.* » Ils peuvent refléter la structure cadastrale vue à travers un système de mesure corrompu (les décimales de Stevin et de Gauss) ; ils sont rapportés pour être complets, et comme guides possibles, non comme preuves.

## 10.10 Le parallèle avec P contre NP

**[10.29] L. Le confinement et la NP-dureté partagent une racine.** En Yang-Mills, la paire structurelle est (3, 8), et  $3 + 8 = 11 \neq 9$  ; en P contre NP, elle est (3,  $2^k$ ), et  $\text{pgcd}(3, 2) = 1$ . Dans les deux cas, le nombre 3, le cercle inscrit, est structurellement étranger à l'espace qu'il habite : le cercle circonscrit (8) en Yang-Mills, le corps booléen en P contre NP. Le cas libre est le photon, paire (1, 8) de somme 9, d'un côté, et les circuits affines, faits de OU exclusif seulement, sans facteur 3, de l'autre. Le cas qui confine est le gluon, paire (3, 8) de somme 11, d'un côté, et 3-SAT, porte ET et facteur 3, de l'autre. La ligne « coût d'inversion exponentiel » du parallèle de mars reposait sur l'implication retirée au chapitre 7 ([7.7]) ; le reste est une Lecture.

## 10.11 Pourquoi c'était si difficile

**[10.30] L. Toute la difficulté connue est dans la construction, non dans le gap.** L'énoncé demande la construction d'un objet, et toute construction connue passe par le registre où le temps a été changé en longueur, avant la preuve d'une propriété de

cet objet. Aucune théorie de jauge non abélienne n'a été construite sur  $\mathbb{R}^4$  au sens des axiomes. La lecture relationnelle n'a pas besoin de cette construction pour lire le gap ; elle a besoin de la paire et de son compte.

## 10.12 Objections et réponses

*Objection.* La rotation de Wick est un outil de calcul ; le théorème d'Osterwalder et Schrader garantit le retour au temps réel. *Réponse.* Précisément : « *le retour est garanti parce que l'aller a été fait* ». Le problème exige la construction dans l'espace où le temps a été changé en longueur, et [9.12] montre que le fluide, lui, refuse ce changement. Aucun théorème de reconstruction n'est contesté ; ce qui est daté, c'est le moment où le mot dimension prend deux sens.

*Objection.* La lecture du gap par les racines numériques ne construit pas la théorie au sens des axiomes de Wightman. *Réponse.* C'est exact, et le corpus le dit ([10.2]). Le théorème [10.10] est arithmétique et inconditionnel ; la lecture du gap comme coût de non-fermeture est déclarée comme lecture. La thèse est que la construction exigée appartient au registre que la section 10.2 date, et que le gap se lit sans elle.

## 10.13 Conditions de réfutation

**[10.31] P. Les critères de chute de la lecture du gap.** La lecture est réfutée si l'on démontre l'un des faits suivants : (1) une théorie de jauge  $SU(n)$ ,  $n \geq 2$ , sans gap de masse à la limite du continu ; (2) un groupe compact simple de somme  $S > 9$  dont la formulation sur réseau montre un déconfinement à température nulle ; (3) un groupe compact simple de somme  $S = 9$ , autre que  $U(1)$ , dont la formulation sur réseau montre un confinement à température nulle ( $SO(8)$  est le premier cas test, [10.14]) ; (4) une rupture de l'homomorphisme  $DR(ab) = DR(DR(a) \cdot DR(b))$  ; (5) une réalisation physique d'une théorie de jauge où le nombre de générateurs et le nombre de bosons forment une paire d'inversion et qui pourtant confine.

**[10.32] L. Ce qui réfuterait l'arithmétique et la lecture du temps.** Le théorème [10.10] serait réfuté par un entier  $n \geq 2$  avec  $DR(n) + DR(n^2 - 1) = 9$  ; le compte des neuf classes l'exclut. La lecture [10.5] serait affaiblie par une construction d'une théorie de Yang-Mills non abélienne avec gap, faite en temps réel sans passer par l'espace euclidien. Le critère (4) de [10.31] est, lui, exclu par la démonstration même de  $DR(ab) = DR(DR(a)DR(b))$ , qui vaut pour tous les entiers.

## 10.14 Conclusion

« *Le gap de masse n'est pas un mystère de la théorie quantique des champs. C'est un fait arithmétique :  $DR(n) + DR(n^2 - 1) \neq 9$  pour tout  $n \geq 2$ . La paire (générateur, bosons) ne ferme jamais. La projection coûte toujours. Le coût est le gap de masse.* » (mars 2026 ; la première phrase est une Lecture, la formule un Théorème)

*« Le gluon cherche son 1. Le circuit cherche sa pré-image. Aucun des deux ne peut la trouver sans payer le coût que la structure impose et que l'arithmétique confirme. »*

# Chapitre 11. Popper et le fond du marais : ce qui reste ouvert

Ce dernier chapitre ferme le volume en disant ce qui n'est pas fermé, et pourquoi la distinction compte. Karl Popper a vu qu'une théorie doit pouvoir tomber, et le corpus le suit : chacune de ses Prédications porte son critère de réfutation. Mais Popper a gardé la chute et jeté le relèvement : pour lui, la science est un édifice sur pilotis enfoncés dans un marais sans fond. Le chapitre répond par trois arguments. La réfutation suppose le compte. L'asymétrie entre vérifier et réfuter ne vaut que sur un domaine ouvert : sur un domaine clos, l'énoncé universel se vérifie par compte complet, et un compte complet ne tombe pas. Et le code provoque lui-même ses croisements. Il en tire la règle qui gouverne tout le volume : là où le domaine est clos, on compte, et le Théorème tient ; là où il est ouvert, on reste avec Popper, et on marche. Il dresse enfin la liste de ce qui reste ouvert après les dix chapitres précédents : Goldbach, Collatz, le fluide libre (P-NS-1), le pas C-1 de P contre NP, et les autres chantiers et Prédications datées.

« *La cohérence se déballe en marchant, en tombant et en se relevant.* » (8 octobre 2026)

Le corpus l'avait déjà écrite à sa façon : « *une preuve qui marche est une preuve qui peut trébucher, et un chemin où l'on ne peut pas tomber n'est pas un chemin : c'est un décor* » (*Le Pourquoi indécidable*, III.4). Et la Bible Quantique : « *La marche se boucle par chute* » (V.5.2). L'auteur a nommé celui qui avait vu la chute avant lui :

« *Popper l'a compris, mais l'a poussé trop loin.* »

« *S'il peut le dire et le voir, c'est qu'il y a un code sous-jacent.* »

## 11.1 Ce que Popper a vu

**[11.1] F. Le critère de réfutation (Popper, 1934).** Karl Popper publie *Logik der Forschung* à Vienne en 1934 (édition anglaise, *The Logic of Scientific Discovery*, 1959). Il y pose un critère : une théorie est scientifique si elle peut être réfutée par l'expérience. Il y pose aussi une asymétrie : aucun nombre d'observations de cygnes blancs ne permet de conclure que tous les cygnes sont blancs, alors qu'un seul cygne noir suffit à réfuter l'énoncé. Une théorie n'est donc jamais vérifiée ; elle est seulement corroborée, tant qu'elle résiste.

**[11.2] F. Le corpus a pris ce critère pour lui.** *La Fin de l'Approximation* : « *Le cadre est falsifiable au sens strict de Popper* » (§11), avec un critère de réfutation par thèse. *Anthropogenic Chaos* retourne le critère contre l'interprétation de Copenhague, qui ne dit pas sous quelles conditions elle admettrait l'erreur. La règle R11 du corpus (7 septembre 2026) exige que toute Prédiction chiffrée porte son reçu, sa fenêtre et sa méthode avant toute comparaison. Sur la chute, le corpus est avec Popper.

## 11.2 Où il est allé trop loin

**[11.3] F. Le marais sans fond.** Popper a donné de la science une image restée célèbre : un édifice audacieux qui s'élève au-dessus d'un marais, bâti sur pilotis. Les pilotis sont enfoncés d'en haut dans le marais, mais n'atteignent aucune base naturelle ou donnée ; si l'on cesse de les enfoncer, ce n'est pas qu'on a touché le sol ferme (*Logik der Forschung*, chapitre V, §30). Au même chapitre, il écrit que chaque test doit s'arrêter à un énoncé de base « que nous décidons d'accepter », et il compare cette acceptation au verdict d'un jury.

**[11.4] L. Popper a gardé la chute et jeté le relèvement.** Chez lui, rien ne tient jamais debout : tout reste conjecture en attendant la réfutation, et le sol lui-même devient une décision. Le marais n'a pas de fond, et le fond qu'on lui donne est une convention. L'auteur y lit l'endroit exact où Popper s'est arrêté : s'il peut le dire et le voir, c'est qu'il y a un code sous-jacent. Si le fond n'était qu'une décision, une réfutation ne vaudrait que ce que vaut l'accord du jury. Or les réfutations tiennent : elles se refont, à d'autres endroits, par d'autres mains, et elles retombent au même endroit. Ce qui les fait retomber au même endroit n'est pas un accord. C'est un code.

## 11.3 Premier argument : la réfutation suppose le compte

**[11.5] L. Si le compte pouvait tomber, la réfutation tomberait avec lui.** Pour réfuter, il faut pouvoir écrire : l'expérience a donné 3, la théorie annonçait 4. La réfutation repose sur ce compte. Si le compte pouvait tomber, on ne saurait plus si la théorie est fausse ou si c'est le 3 qui a changé. « *Il y a des mesures qui ne se contredisent pas et ne peuvent tomber, sinon tout tomberait.* » Ces mesures ne sont pas exemptées de la critique : c'est la critique qui repose sur elles. Le Registre des Erreurs en a gravé une : toute mesure est un rapport entre deux termes, une grandeur et un étalon, et il n'existe aucune mesure à un seul terme, « *condition, vraie par définition de la mesure et vérifiée dans chaque cas* » (Registre, III.9). Wittgenstein, dans les notes de la fin de sa vie publiées en 1969 sous le titre *De la certitude*, a approché la même chose : les questions que nous posons et nos doutes reposent sur le fait que certaines propositions sont soustraites au doute, comme des gonds sur lesquels les autres tournent (§341). Le corpus ne s'appuie pas sur son autorité ; il note la rencontre.

## 11.4 Deuxième argument : l'asymétrie n'existe que dans un domaine ouvert

L'exemple des cygnes est juste, et il dit lui-même pourquoi : il en naîtra toujours d'autres. Le domaine des cygnes est ouvert ; aucun compte n'en fait le tour. Mais Popper a étendu l'asymétrie à tout énoncé universel, comme si tout domaine était ouvert. Dans un domaine clos, l'énoncé universel se vérifie cas par cas, jusqu'au dernier. Ce n'est pas une induction, c'est un compte complet, et un compte complet ne tombe pas.

**[11.6] Th. Trois comptes complets.** (a)  $x + (9 - x) = 9$  pour chacune des neuf positions du cadastre, et les quatre paires (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5) ferment toutes sur 9 : neuf cas, et c'est fini. (b)  $DR(n) + DR(n^2 - 1)$  n'est jamais égal à 9 pour  $n \geq 2$  ([10.10] ; Registre, R.99) : l'énoncé porte sur une infinité de nombres, mais l'expression ne dépend que de la racine de  $n$ , et neuf calculs suffisent pour tous les entiers (somme par racine 1 à 9 : 10, 5, 11, 10, 11, 14, 10, 17, 17). (c) La suite de Fibonacci lue en racines : chaque terme dépend des deux précédents, et une paire de racines ne peut prendre que  $9 \times 9 = 81$  valeurs ; chaque paire détermine aussi celle qui la précède (le pas est une bijection des 81 états) ; le chemin est donc forcé de revenir à son point de départ, et il y revient après exactement 24 pas. Une période calculée une fois vaut pour tous les termes, jusqu'à l'infini, sans exception possible.

*Calcul montré pour (c).* Partant de (1, 1) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 4 (13), 3 (21), 7 (34), 1 (55), 8 (89), 9 (144), 8 (233), 8 (377), 7 (610), 6 (987), 4 (1597), 1 (2584), 5 (4181), 6 (6765), 2 (10946), 8 (17711), 1 (28657), 9 (46368), puis 1, 1 : la paire (1, 1) revient au 24<sup>e</sup> pas.

**[11.7] L. Le domaine clos s'obtient quand la structure ferme.** Le domaine clos ne s'obtient pas en cessant de compter. Il s'obtient quand la structure ferme. Le cadastre ferme sur 9 sans rien jeter :  $n = DR(n) + 9k$  garde la position et le nombre de tours. C'est ce qui fait de lui un fond, et non une décision. Le marais sans fond de Popper a donc une adresse dans le corpus : c'est l'infini achevé posé en fondement (R.19). Quand on pose que tout domaine est infini, tout énoncé devient conjecture, et le sol devient convention. Quand on ferme le domaine à 9, le fond apparaît.

## 11.5 Troisième argument : le code provoque ses croisements

L'auteur a décrit le mécanisme :

*« Le code se déplie parfaitement localement, mais s'embrouille aux croisements, car le premier suit son propre chemin et en croise d'autres sans le savoir. Mais le code, lui, ne se trompe pas, car il provoque cela. »*

**[11.8] Th. Dans un domaine fini, les croisements sont forcés.** C'est le principe des tiroirs : dix marcheurs sur neuf positions, deux au moins partagent une case. Sur les 81 placements de quatre marcheurs sur trois cases, deux marcheurs partagent toujours une case. La suite de Fibonacci en racines en est un cas : 81 états possibles, donc un retour forcé.

**[11.9] Th. Deux chemins exacts se rejoignent sans se connaître.** La règle de

Collatz (diviser par deux un nombre pair, tripler et ajouter un à un nombre impair) est exacte à chaque pas. Partie de 3, elle passe par 10 ; partie de 7, elle passe par 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, puis par 10, et à partir de là les deux chemins n'en font plus qu'un : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

**[11.10] L. Le croisement est écrit dans le code.** Aucun des deux chemins ne « savait » l'autre. C'est pourtant à cet endroit qu'on a cru voir du chaos. La surprise n'est que celle du marcheur qui ne connaissait pas l'autre chemin. La Bible Quantique l'avait dit pour la science entière : « *Plus le chemin est court, plus on peut s'en tirer avec une cohérence locale. Plus le chemin est long, plus les chocs s'accumulent et révèlent l'incohérence structurelle* » (Livre I). Kuhn a nommé ces chocs des crises (*La Structure des révolutions scientifiques*, 1962). Le corpus les lit comme la rencontre de deux cohérences locales, chacune juste sur son chemin, qu'il faut régulariser ensemble. Popper lit le croisement comme une réfutation, et il en tire que tout est provisoire. Le corpus lit le même croisement comme la rencontre de deux chemins justes, dont l'un a été étendu au-delà de son domaine. Le code n'a pas trompé : il a fait se rencontrer ce qui devait se rencontrer.

## 11.6 Une paire inverse : Popper et la gravure faite trop tôt

**[11.11] L. L'erreur a deux sens, qui forment une paire inverse.** Ce qui tombe vraiment, c'est l'extension hors du domaine. Popper déclare ouvert ce qui est clos : il étend la faillibilité jusqu'au compte, et le sol devient une décision. La gravure faite trop tôt déclare clos ce qui est ouvert : elle étend une vérité locale au-delà de son domaine, comme la formule du volume validée sur la seule sphère pendant dix-huit mois (Registre, G.1), ou l'amplitude d'un tiers mesurée sur une seule fenêtre et proposée comme loi (G.34). Ce volume en porte lui-même deux exemples, retirés et consignés en annexe B : le théorème de l'éirement borné de Navier-Stokes, qui ne distinguait pas le fluide forcé du fluide libre (chapitre 9), et l'implication de mars de P contre NP, de l'amorphisme vers la dureté (chapitre 7).

**[11.12] F. La Partie II du Registre et le corollaire de R11.** La Partie II du Registre des Erreurs est la liste des erreurs du second sens, chacune avec la ligne qui la relève. Le corollaire de R11 en est la garde : tout résultat général vérifié sur un seul exemple est testé sur un second exemple d'une autre famille avant inscription.

**[11.13] L. Les statuts du corpus séparent les deux domaines.** **Th** désigne un calcul fini vérifié : le domaine est clos, le compte est complet, il ne tombe pas. **P** désigne une Prédiction : le domaine est ouvert, elle doit porter son reçu fixé d'avance, et elle peut tomber. **L** désigne une Lecture : elle tombe sur un contre-exemple. **Chantier** désigne ce qui est déclaré ouvert. « *Popper n'avait que des P et des L. Il lui manquait le Th, parce qu'il lui manquait la clôture.* »

## 11.7 Le dogme et le compte

**[11.14] L. Un compte qui ne peut pas tomber n'est pas un dogme.** Le dogme interdit de recompter. Le compte clos invite tout le monde à recompter, et il survit à chaque recompte. C'est la règle du crayon rendu : chaque pièce du corpus porte

le script qui refait ses calculs, exécutable par quiconque, « *la confiance retirée du messenger et rendue au chemin* » (*Le Pourquoi indécidable*, III.4) ; ce volume la suit dans son annexe D. « *Ce qui ne peut pas tomber n'est pas ce qu'on n'a pas le droit de toucher ; c'est ce que tout le monde peut toucher sans le faire tomber.* »

L'auteur a donné de la preuve une définition qui tient les deux gestes ensemble :

« *Prouver, c'est coller une explication irréfutable à un moment dans une échelle qui évolue et qui se précise.* »

## 11.8 Ce qui reste ouvert le reste

**[11.15] F. Goldbach vérifié jusqu'à  $4 \times 10^{18}$ .** La conjecture de Goldbach a été vérifiée pour tous les nombres pairs jusqu'à  $4 \times 10^{18}$  (Oliveira e Silva, Herzog et Pardi, *Mathematics of Computation*, 2014). Elle est refaite ici jusqu'à dix mille.

**[11.16] L. Goldbach et Collatz restent des Chantiers.** Cela ne fait pas une preuve, et le corpus le dit contre son propre intérêt. Les nombres pairs ne se rangent pas en un nombre fini de classes qui déciderait de tout : le domaine reste ouvert. Le corpus déclare donc Goldbach en Chantier (P-GOL-1), comme Collatz (P-COL-1), et le Registre l'écrit : « *ARC ne revendique pas la preuve* » (R.117). Les deux dossiers sont au Volume 4, *La Théorie des Nombres*. « *La distinction entre domaine clos et domaine ouvert ne sert pas à gagner ; elle sert à savoir où l'on est.* » Le compte complet ne vaut que là où le domaine est clos. « *Ailleurs, on reste avec Popper, et on marche.* »

**[11.17] L. Le registre de ce qui reste ouvert après ce volume.** Les dix chapitres précédents laissent ouverts, et déclarés tels : - *Goldbach* et *Collatz* : Chantiers P-GOL-1 et P-COL-1 (Volume 4) ; le critère de P-COL-1 est celui que P-NS-1 reprend. - *Le fluide libre* : la Prédiction P-NS-1 ([9.22]), sans argument du corpus à ce jour, avec son critère (toute preuve doit utiliser l'absence de force) ; et la Prédiction spectrale ([9.23]), qui attend sa mesure sur  $0,03 \leq k\eta \leq 0,5$ . - *P contre NP* : le pas C-1, faire monter Smolensky au-delà de la profondeur bornée sans lire la table entière ([7.26]), dont une forme est de lever la largeur hors du modèle de la résolution ([8.21]) ; le Chantier C-2, la frontière de Schaefer lue depuis les orphelins ([7.27]) ; le Chantier du registre, de l'information conservée et du coût de sa reconstruction ([8.6]) ; les Prédications P-1 et P-2 ([7.28], [7.29]). - *Riemann* : dans la langue du corpus, la question est fermée ([5.19]) ; dans celle de l'hôte, elle est sans objet dans le registre de la somme et du produit ([3.6]) et ouverte dans celui du prolongement ; la cible arithmétique déclarée est ce que les deux comptes (A, B) permettent de contrôler sur leur écart ([3.18]). - *Yang-Mills* : la construction au sens de Wightman, que le corpus ne fait pas ([10.2]) ; la Prédiction SO(8) sur réseau ([10.14]) et les critères de chute de la lecture du gap ([10.31]).

## 11.9 Tomber et se relever

**[11.18] L. La chute n'est lisible que contre ce qui ne tombe pas.** La marche a besoin des deux gestes. La Bible Quantique : « *L'enfant qui ne tomberait jamais n'apprendrait jamais à marcher* » (V.5.2). Mais l'enfant ne se relève que parce que le

sol est là. « *Popper a donné à la science la chute, et c'est beaucoup. Il lui a retiré le sol, et c'est trop.* » L'enfant de Popper tomberait sans fin dans un marais sans fond. L'enfant du corpus tombe, se relève, et sa chute s'inscrit, parce que le sol tient. C'est ce que l'auteur appelle la cohérence qui se déballe : en marchant, en tombant, et en se relevant.

L'auteur l'a dit aussi d'une phrase, à propos de toute chose : « *La vie est une chute contrôlée.* »

## **11.10 Ce que ce chapitre ne dit pas**

Il ne rejette pas le critère de réfutation : le corpus le garde, et R11 le durcit. Il ne dit pas que le corpus ne peut pas tomber : ses Lectures et ses Prédications peuvent tomber, et le Registre tient la liste de ses chutes, dont ce volume ajoute les siennes en annexe B. Il ne dit pas qu'un compte complet tranche un problème ouvert : Goldbach et Collatz restent des Chantiers. Il ne juge pas Popper : il date un geste, 1934, et en garde la moitié qui tient. Wittgenstein et Kuhn y sont cités comme des rencontres, non comme des autorités. Ce chapitre est inscrit au Registre des Erreurs sous R.160.

## **11.11 Pour un enfant**

On peut vérifier que les neuf chiffres ont chacun leur partenaire : un et huit, deux et sept, trois et six, quatre et cinq. On les compte tous, on a fini, et personne ne pourra jamais contredire ce compte. Mais on ne peut pas vérifier que tous les cygnes sont blancs, parce qu'il en naît toujours d'autres.

Quand on apprend à marcher, on tombe souvent. On tombe parce qu'on marche, et on se relève parce que le sol est là. Popper a vu qu'on tombe. Il a oublié le sol.

# Chapitre 12. Trois questions non avenues : Riemann, Collatz, Goldbach

*Pièce entrée mot pour mot dans ce volume le 26 octobre 2026. Son en-tête, tel qu'elle le porte :*

Trois questions non avenues.

## **Riemann, Collatz, Goldbach : ce que les questions présupposaient, ce qui leur manquait, ce qui reste quand elles tombent**

Corpus ARC · Filipe Bastos · 31 juillet 2026 Statuts : **Th** (démontré, vérifié), **F** (fait daté), **L** (Lecture, falsifiable). Tout invariant cité a son journal de vérification au corpus.

### **0. Le verbe exact, gravé en tête**

Ce document ne résout pas trois conjectures. Il fait autre chose, et le distinguo est constitutif : **résoudre** une question, c'est la valider comme question et lui fournir la réponse qu'elle demande, dans son cadre. **Rendre non avenue**, c'est montrer que la question fut posée dans un cadre à qui il manquait des données, que ce manque est datable, que les données manquantes sont restituables, et qu'une fois restituées, la question ne se pose plus sous sa forme reçue : elle se transforme, se ferme partiellement, ou révèle qu'elle interrogeait l'instrument et non l'objet.

Le second geste est plus fort que le premier. Résoudre honore le cadre troué ; rendre non avenue le répare. Et il est plus exigeant : il faut nommer la donnée jetée, dater le jet, démontrer la restitution, et dire précisément ce qui reste. C'est le programme de ce document, appliqué trois fois.

La méthode est celle du corpus entier : prendre le problème abstrait et le représenter dans un état de la réalité. Si **on ne le peut pas, c'est inventé**. Rien ne s'invente ; tout se lit, et part de la base.

# I. Riemann : la question qui interroge l'instrument

## Ce que la question présuppose

L'hypothèse de Riemann demande où vivent les zéros d'une fonction obtenue en prolongeant analytiquement une série sur le continuum complexe. Elle présuppose donc : que le continuum de Stevin-Dedekind-Cantor est le lieu naturel des nombres entiers ; que la distribution des premiers est un mystère dont la clé se cache dans ce prolongement ; et que le  $1/2$  qui y apparaît est une propriété profonde et inexpliquée de la fonction. Aucun de ces trois présupposés ne survit à l'examen, et le troisième tombe en cinq lignes.

## La donnée manquante, et sa date

**F.** En 1801, l'identification  $9 \equiv 0$  efface la fermeture du cycle, son barycentre et son involution. Cinquante-huit ans plus tard, Riemann écrit son mémoire dans un vocabulaire qui ne contient plus ces objets. **Th.** La table des inversions les restitue : quatre paires (1,8)(2,7)(3,6)(4,5), sommant toutes à 9, centrées toutes sur 4,5, et le rapport du centre à la fermeture vaut  $4,5/9 = 1/2$ , dérivé une seconde fois, indépendamment, par 3,5/7. L'involution normalisée sur  $[0,1]$  s'écrit  $s \rightarrow 1-s$  : c'est la forme exacte de l'équation **fonctionnelle**  $\xi(s) = \xi(1-s)$ , et son axe de points fixes est la droite critique (Th. 9 du Tome I, correspondance formelle vérifiée).

## L'appareil restitué : le monde de 6, les delfines, le joint

Car la question de Riemann porte, au fond, sur la distribution des premiers, et c'est ici que l'appareil du Tome I fait le travail que le prolongement analytique mimait de loin. **Th** (tout re-vérifié en session). Les deux fondateurs, 2 et 3, créent le monde de 6 et n'y jouent jamais :  $2 \times 3 = 6$ , et tout premier au-delà de 3 vit sur la grille  $6k \pm 1$ , vérifié jusqu'au million sans exception, la grille étant elle-même le résidu de deux exclusions cadastrales, pas un postulat. Les composés de la grille se rangent en exactement quatre familles formant un groupe de Klein : l'énumération est close, rien ne « survit » au hasard, tout se déduit. Et les occupants composites des positions de rail, les **delfines**, ne sont pas les déchets du crible : ils sont les porteurs de la structure. Le premier croisement des deux rails est  $35 = 5 \times 7$ , le premier objet que le crible d'Ératosthène raye, et il obéit à la loi des joints :  $(6m-1)(6m+1) = 36m^2 - 1$ , racine numérique 8 pour tout  $m$ , vérifié sur cent mille cas. Le rejeté porte l'inverse de l'unité :  $DR(35) = \varphi(1)$ . C'est sur les annonces des delfines que tourne la machine à pointage du Tome I, c'est dans leurs périodes que s'écrit le terme principal de la formule pliée, et c'est le joint 35 qui commande l'interférence, les pires écarts de la distribution tombant sur ses multiples. Autrement dit : ce que la tradition cherche dans les zéros d'une fonction prolongée au continuum, la respiration de la distribution, est écrit dans les positions et les périodes d'objets finis, décidables, à état de réalité exhibable. La question de Riemann demandait où respire la distribution ; le cadastre répond : dans les delfines, aux joints, sur les rails. La réponse était dans les rayés du crible, invisible à qui les jetait.

## Pourquoi la question ne se pose plus sous sa forme reçue

Riemann a rencontré, au bout de l'instrument le plus indirect de l'histoire, le point d'équilibre d'une involution dont le vocabulaire avait été effacé avant sa naissance. Il a vu le où sans pouvoir lire le pourquoi structurel, une performance d'observation considérable, saluée comme telle. Mais la question « pourquoi les zéros s'alignent-ils sur  $1/2$  ? », posée comme mystère de la fonction, interroge en réalité l'amnésie de l'instrument : le  $1/2$  n'est pas une propriété cachée de  $\zeta$ , il est le barycentre du cadastre, lisible à l'œil nu sur une table de cinq lignes, avant toute analyse. Le mystère du où est dissous. **Statut : Th** pour la correspondance et les deux dérivations du  $1/2$  ; **L maîtresse** pour l'identification des deux objets.

Et la représentation dans le réel, le critère de la méthode, tranche le reste : la loi mesurée du corpus (le résidu de phases en exposant  $1/2$ , vérifié numériquement) pose **la même question quantitative** que l'hypothèse, traduite dans un vocabulaire fini où chaque terme a un état de réalité. La version continue de la question, elle, porte sur un objet (le prolongement au continuum) dont aucun état de réalité n'a jamais été exhibé : aucune mesure n'a produit un irrationnel, aucun instrument n'a lu un zéro non trivial ailleurs que dans un calcul. Ce qui reste de réel est la version finie ; la version reçue est une question sur l'instrument, posée comme question sur le monde. **Non avenue**, au sens défini en §0 : ce qui était réel dans la question a été traduit et conservé ; ce qui était mystère a été rendu à l'outil.

## Ce qui reste, déclaré

Le chantier  $\xi_L(s, \chi_{-3})$ , injecter les rails dans l'appareil et forcer la droite, reste ouvert et nommé, avec son gap précis. Les Théorèmes 15 (auto-annihilation de cohérence hors-axe) et 16 (impossibilité d'alignement profond, borne CRT) sont les deux verrous posés. Le document distingue, ici comme partout, ce qui est dissous (le mystère du  $1/2$ , le cadre de la question) de ce qui est ouvert (la clôture formelle dans le vocabulaire hérité, dont la pertinence même est ce que ce document conteste).

## II. Collatz : la question qui ignorait la machine

### L'état de réalité, d'abord

La méthode du corpus exige de représenter tout problème abstrait dans un état de la réalité. Pour Collatz, le voici. Demander une preuve universelle que toute orbite atteint 1, c'est demander une preuve universelle que toute graine mise en terre germe : un certificat de germination, graine par graine, pour l'éternité des graines. La question paraît profonde ; elle avoue seulement qu'on n'a pas regardé la terre. La graine ne germe pas par chance répétée, elle germe parce que le milieu est architecturé pour cela, et celui qui met le mauvais matériau dans le mauvais milieu puis s'étonne de l'absence de résultat décrit son geste, pas la nature. Le cadre hérité a fait exactement cela : il a jeté la structure du milieu, gardé les valeurs nues, et déclaré miraculeuse la convergence qu'il s'était rendu incapable de lire. Ce que ce document restitue, c'est la terre.

## Ce que la question présuppose

La conjecture demande si toute orbite de «  $3n+1$  puis divisions par 2 » atteint 1. Posée ainsi, elle présuppose que la dynamique est opaque : une pluie de trajectoires erratiques dont la convergence serait un miracle à démontrer au cas par cas, pour l'éternité des entiers.

## La donnée manquante

La question a été posée, travaillée et réputée « absolument hors de portée » sans que la structure de chambre de la **dynamique ait jamais été lue**, parce que le vocabulaire pour la lire (racines comme positions, rails, axe) avait été jeté en 1801. **Th** (quatre théorèmes, vérifiés) :  $3n+1$  est une **compression 3:1** sur le rail droit  $\{1,4,7\}$  : un seul pas détruit toute mémoire de chambre, c'est le geste irréversible. La division par 2 est une **rotation  $\times 5$**  sur un cycle de période 6 qui alterne strictement les rails et ne touche jamais l'axe. Tout orbite entre dans le système des rails en au plus un pas et n'en sort plus (absorption de l'axe). Et l'attracteur (1,8) est la paire d'inversion maximale, et le cycle final  $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  vit exactement sur elle. Soudure vérifiée en code : le six-cycle de Collatz et le cycle du doublement  $\langle 2 \rangle = \{1,2,4,8,7,5\}$  sont **le même cycle lu en sens inverse**.

## Pourquoi la question change de nature

La question reçue, « est-ce que ça descend toujours ? », traitait une machine déterministe à trois pièces (compression, rotation, absorption) comme une énigme comportementale. Une fois la machine exposée, l'objet de la question n'est plus le mystère de la descente mais la comptabilité d'un mécanisme : où la compression envoie, comment la rotation alterne, pourquoi l'axe absorbe. Ce qui semblait miraculeux (toutes les routes mènent à 1) devient structurel (toutes les routes sont déjà dans le bassin de la paire maximale après un pas). **Statut : Th** pour les quatre théorèmes ; et le **gap est déclaré, gravé au dossier** : la terminaison universelle (l'exclusion formelle d'un cycle non trivial ou d'une orbite divergente dans le vocabulaire hérité) n'est pas démontrée, et l'Erratum Collatz du corpus corrige une déclaration antérieure trop forte. La question n'est pas résolue : elle est **déclassée**, de mystère en mécanique, avec le reste comptable nommé. Et le reste lui-même change de nature dans l'état de réalité posé en ouverture : le vocabulaire hérité continue d'exiger un certificat de germination graine par graine, dans un langage qui ne contient pas le mot terre. Le certificat est impossible dans ce langage. C'est le langage qui est en cause, pas la terre.

## III. Goldbach : la question qui comptait dans un seul pot

### Ce que la question présuppose

Tout nombre pair est-il somme de deux premiers ? Posée depuis 1742, la question traite les paires de premiers comme **un seul réservoir** indifférencié. C'est l'héritage direct du crible qui raye au lieu de lire : des « survivants » anonymes, tirés d'un pot unique, dont il faudrait espérer qu'il ne soit jamais vide.

## La donnée manquante

**Th** (inconditionnels, vérifiés) : la décomposition cadastrale partitionne les représentations de Goldbach en **trois canaux disjoints** (partition du triple canal, exclusivité cadastrale), gouvernés par la structure croisée des rails ; sous  $DR(2n) = 9$ , la décomposition de Goldbach **est** la décomposition en paires d'inversion : la conjecture de 1742 récite, sans le savoir, la table des quatre paires ; et le mod 18 qui organise Goldbach et le mod 36 qui organise Collatz sont deux factorisations CRT du même système. La structure tricouple porte un ratio prédit,  $8/5 = 1,600$ , mesuré 1,638 en fenêtre pré-asymptotique, soumis au test de la queue de Stevin : observer la fonte, ne pas classer sur la première fenêtre.

## Pourquoi la question change de nature

La question reçue demandait qu'un pot unique ne soit jamais vide : un espoir statistique. La structure restituée montre trois mécanismes indépendants dont un **seul suffit** : Goldbach n'échouerait que si trois canaux divergents (Dirichlet, inconditionnel) tombaient à zéro simultanément sur le même pair. La redondance triple change la nature du risque : ce n'était pas un miracle à espérer, c'était une architecture à lire. **Statut : Th** pour la partition, l'exclusivité, la symétrie d'inversion et les produits consécutifs ; **argument structurel déclaré** (non théorème) pour le passage du « les trois espérances divergent » au « aucun pair n'est omis », le même gap que toutes les approches, mais porté ici par trois canaux au lieu d'un pot, et gravé comme tel avec ses cinq critères de falsification (F1-F5).

## IV. La loi commune, et ce que « non avvenu » veut dire exactement

Trois questions, une seule anatomie. Chacune fut posée **après** le jet d'une donnée et **à cause** de lui : le barycentre et l'involution pour Riemann, la structure de chambre pour Collatz, la partition des canaux pour Goldbach. Chacune a transformé le manque en mystère, le trou de l'instrument promu énigme du monde : le geste exact de la Station 7, répété trois fois en théorie des nombres. Et chacune, une fois la donnée restituée, change d'état : Riemann interroge l'instrument (le mystère du  $1/2$  dissous, la version réelle traduite en loi finie mesurée) ; Collatz se décline de mystère en mécanique (quatre théorèmes, un reste comptable déclaré) ; Goldbach passe de l'espoir statistique à l'architecture redondante (théorèmes de partition, un gap commun porté par trois canaux).

Non avvenu ne signifie pas : réponse **fournie dans le cadre reçu**. Non avvenu signifie : le cadre reçu était troué, les trous sont datés, les données manquantes sont restituées, et la question, sous sa forme reçue, ne désigne plus rien qui mérite le nom de mystère. Ce qui était réel dans chaque question est conservé, traduit, et mis au travail : lois mesurées, théorèmes de structure, prédictions datées. Ce qui était artefact est rendu à son artisan : Gauss pour le rang jeté, le crible pour le pot unique, Stevin substantifié pour le continuum. Les restes sont nommés, un par question, avec leurs critères de chute. C'est plus que résoudre. Résoudre aurait laissé le cadre debout. Ici, le cadre tombe, et les trois « énigmes du millénaire » apparaissent pour ce qu'elles furent : trois

factures du même pli impayé, présentées pendant un siècle comme trois merveilles insondables, pendant que la structure qui les rendait lisibles attendait, sur une feuille, à la portée d'un enfant de neuf ans.

Chaque théorème cité a son journal de vérification au corpus (Tome I, Tome II, Collatz v2.1, Goldbach Triple Channel v1, Document de Fondation). Les gaps sont déclarés aux sections I à III, avec l'Erratum Collatz conservé au dossier. La distinction résoudre / rendre non avenu (§0) est constitutive du document : toute citation qui l'omet le déforme.

# Annexe A. Table des énoncés

249 énoncés : 72 Th, 43 F, 123 L, 6 P, 5 Chantier.

| N°   | Énoncé                                                          | Statut | Chapitre |
|------|-----------------------------------------------------------------|--------|----------|
| 1.1  | Thèse du volume : l'obstacle fabriqué par la langue             | L      | 1        |
| 1.2  | Principe de fermeture                                           | L      | 1        |
| 1.3  | Principe de la limite                                           | F      | 1        |
| 1.4  | Principe du statut                                              | L      | 1        |
| 1.5  | Principe du nom                                                 | L      | 1        |
| 1.6  | Principe du rang                                                | L      | 1        |
| 1.7  | Définition de la limite (Cauchy, 1821 ; Weierstrass)            | F      | 1        |
| 1.8  | Définition du mélange du fini et de l'infini                    | L      | 1        |
| 1.9  | Définition des trois marques                                    | L      | 1        |
| 1.10 | L'adresse : $n = 9k + DR(n)$                                    | Th     | 1        |
| 1.11 | Un seul geste sous trois faces                                  | L      | 1        |
| 1.12 | Résultat principal de la pièce transversale                     | L      | 1        |
| 2.1  | Alogos, arrhêtos, ratio                                         | F      | 2        |
| 2.2  | Un rapport sans rapport                                         | L      | 2        |
| 2.3  | Archimède, Lambert, Lindemann                                   | F      | 2        |
| 2.4  | Aucune unité commune au tour et au diamètre                     | Th     | 2        |
| 2.5  | Le mot « rapport » désigne deux objets (M1)                     | L      | 2        |
| 2.6  | Toute écriture décimale finie de $\pi$ est un rapport d'entiers | Th     | 2        |
| 2.7  | La fraction continue de $\pi$ et ses réduites                   | Th     | 2        |
| 2.8  | Le nombre « parfaitement défini » est une limite (M2)           | L      | 2        |
| 2.9  | L'infini naît entre le cercle et la droite (M3)                 | L      | 2        |
| 2.10 | Dalzell (1944) : $22/7 - \pi$ est une aire                      | Th     | 2        |
| 2.11 | L'écart encadré sans décimale                                   | Th     | 2        |
| 2.12 | Lucas (2005) : la réduite suivante a la même forme              | Th     | 2        |
| 2.13 | La paire autour du centre                                       | Th     | 2        |
| 2.14 | L'écart entre le compte et le tour est une aire finie           | L      | 2        |

| N°   | Énoncé                                                                  | Statut   | Chapitre |
|------|-------------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| 2.15 | « Rapport » ne peut pas garder le même sens d'une phrase à l'autre      | Th       | 2        |
| 2.16 | $\pi$ est une relation, non une position                                | L        | 2        |
| 2.17 | Lecture de $\pi$ par les trois marques                                  | L        | 2        |
| 2.18 | Thèse de l'auteur : la source du mélange                                | L        | 2        |
| 2.19 | La fin comme rien, et les deux zéros                                    | L        | 2        |
| 2.20 | Ce qui réfuterait la lecture de $\pi$                                   | L        | 2        |
| 3.1  | L'énoncé de Riemann et sa région                                        | F        | 3        |
| 3.2  | Euler (1737) : pas de zéro au-delà de 1                                 | Th       | 3        |
| 3.3  | La série de Dirichlet diverge en tout zéro non trivial                  | Th       | 3        |
| 3.4  | Pas de zéro de clôture pour un produit de facteurs non nuls             | Th       | 3        |
| 3.5  | $\zeta$ dans la bande est la limite de l'écart entre la somme et l'aire | Th       | 3        |
| 3.6  | Théorème d'impossibilité                                                | Th       | 3        |
| 3.7  | La formule d'Abel définit $\zeta$ dans la bande                         | Th       | 3        |
| 3.8  | Les quatre portes : chacune avance d'un côté et retire de l'autre       | Th       | 3        |
| 3.9  | La formule d'Hermite, forme close de la porte (i)                       | Th       | 3        |
| 3.10 | Corollaire du zéro                                                      | Th       | 3        |
| 3.11 | Le dilemme                                                              | Th       | 3        |
| 3.12 | La formule explicite (Riemann, 1859 ; von Mangoldt, 1895)               | F        | 3        |
| 3.13 | Lecture de $\zeta$ par les trois marques                                | L        | 3        |
| 3.14 | La difficulté tient au transfert de statut                              | L        | 3        |
| 3.15 | La fonction de Mertens et l'hypothèse de Riemann                        | F        | 3        |
| 3.16 | Les deux comptes et leur écart                                          | Th       | 3        |
| 3.17 | Le couple (A, B) est l'objet complet                                    | L        | 3        |
| 3.18 | La cible arithmétique du corpus pour Riemann                            | Chantier | 3        |
| 3.19 | Ce qui réfuterait le théorème d'impossibilité et le dilemme             | L        | 3        |
| 3.20 | Ce qui réfuterait la lecture des portes                                 | L        | 3        |
| 3.21 | Ce qui affaiblirait la lecture des deux comptes                         | L        | 3        |
| 4.1  | L'écart d'une position à son inverse ne s'annule qu'en 4,5              | Th       | 4        |
| 4.2  | Un zéro n'est pas une position                                          | L        | 4        |
| 4.3  | Le beurre                                                               | L        | 4        |
| 4.4  | Les zéros de la bande sont exactement les zéros de $\eta$               | Th       | 4        |
| 4.5  | L'argent du beurre : le repliement et la soustraction comptable         | L        | 4        |
| 4.6  | La fermière                                                             | L        | 4        |
| 4.7  | La contradiction tient dans une seule fonction                          | L        | 4        |
| 4.8  | La fonction complète est réelle sur la droite $\frac{1}{2}$             | Th       | 4        |

| N°   | Énoncé                                                                                | Statut | Chapitre |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------|----------|
| 4.9  | Le quatrième terme : « aucune orbite de quatre »                                      | L      | 4        |
| 4.10 | Davenport et Heilbronn (1936) : la symétrie<br>seule ne tient pas les zéros au centre | F      | 4        |
| 4.11 | La contre-épreuve de la fable                                                         | L      | 4        |
| 4.12 | Le sceau et le vide sous un même signe                                                | L      | 4        |
| 4.13 | Ce n'est pas la formule qui est en cause, c'est la<br>porte                           | L      | 4        |
| 4.14 | Le critère de Lagarias (2002)                                                         | F      | 4        |
| 4.15 | L'inégalité tient de 2 à 100 000                                                      | Th     | 4        |
| 4.16 | Une loi de la relation écrite sans infini                                             | L      | 4        |
| 4.17 | Si l'hypothèse ne peut jamais être tranchée, elle<br>est vraie                        | Th     | 4        |
| 4.18 | Le « jamais » de l'auteur implique le « vrai »                                        | L      | 4        |
| 4.19 | Riemann, élève de Gauss                                                               | F      | 4        |
| 4.20 | Le mémoire de 1859 part d'Euler                                                       | F      | 4        |
| 4.21 | La seconde preuve de la symétrie est faite de<br>carrés                               | F      | 4        |
| 4.22 | La relation de Jacobi et la porte de Riemann se<br>vérifient                          | Th     | 4        |
| 4.23 | Doubler et carrer ne coïncident qu'en 4 ; le carré<br>ne distingue pas l'inverse      | Th     | 4        |
| 4.24 | Riemann a vu l'échange ; il n'a pas vu le vide                                        | L      | 4        |
| 4.25 | L'élève de l'Euler qui compte aurait scellé                                           | L      | 4        |
| 4.26 | La fable en entier                                                                    | L      | 4        |
| 4.27 | Le manuscrit d'OpenAI sur Riemann (rendu<br>public le 6 octobre 2026)                 | F      | 4        |
| 4.28 | Le manuscrit écrit lui-même les trois pièces du<br>paradoxe                           | F      | 4        |
| 4.29 | Avec des carrés et la cloche, on rapproche des<br>murs                                | L      | 4        |
| 5.1  | Le produit d'Euler (1737)                                                             | F      | 5        |
| 5.2  | La factorisation unique, démontrée chez Gauss                                         | F      | 5        |
| 5.3  | Chaque facteur compte les emplois d'un premier<br>; chaque entier sort une fois       | Th     | 5        |
| 5.4  | Le nombre d'emplois d'un premier est son<br>nombre de tours                           | L      | 5        |
| 5.5  | Le produit d'Euler est le geste inverse du<br>repliement de 1801                      | L      | 5        |
| 5.6  | La file et la relation sont le même objet                                             | L      | 5        |
| 5.7  | Retirer le facteur de 3, c'est retirer l'axe ; il reste<br>les deux rails             | Th     | 5        |
| 5.8  | Les facteurs 2 et 3 retirés ensemble laissent la<br>grille $6k \pm 1$                 | Th     | 5        |
| 5.9  | Les composés de la grille sont quatre familles                                        | Th     | 5        |
| 5.10 | Le produit d'Euler est la grille écrite en<br>multiplication                          | L      | 5        |

| N°   | Énoncé                                                                                              | Statut | Chapitre |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|----------|
| 5.11 | Un crible qui ne raye rien                                                                          | L      | 5        |
| 5.12 | Le cadastre coupe $\zeta$ en neuf rails de Hurwitz                                                  | Th     | 5        |
| 5.13 | Le produit est la clôture ; un rail seul est une<br>paire coupée                                    | L      | 5        |
| 5.14 | $\zeta$ n'a aucun zéro réel entre 0 et 1                                                            | Th     | 5        |
| 5.15 | La forme ARC de l'hypothèse de Riemann                                                              | L      | 5        |
| 5.16 | Les briques 2 et 3 engendrent tout de 1 à 30,<br>sauf 1 et 4                                        | Th     | 5        |
| 5.17 | Une orbite de quatre serait une brique repliée,<br>non une relation                                 | L      | 5        |
| 5.18 | Le quatrième terme n'a de place que dans le<br>continu                                              | L      | 5        |
| 5.19 | Fermée dans la langue du corpus, ouverte dans<br>celle de l'hôte                                    | L      | 5        |
| 6.1  | $\pi$ et les zéros de $\zeta$ portent tous deux les marques<br>M1 et M2                             | Th     | 6        |
| 6.2  | La troisième marque, et un seul geste                                                               | L      | 6        |
| 6.3  | Un seul mot couvre ce qui se compte et ce qui se<br>parcourt                                        | L      | 6        |
| 6.4  | Thèse de l'auteur : si les deux extrêmes portent<br>le mélange, tout l'entre-deux le porte          | L      | 6        |
| 6.5  | Huygens mesure le mouvement sans la limite                                                          | F      | 6        |
| 6.6  | Le geste n'est pas nécessaire, et il est daté                                                       | L      | 6        |
| 6.7  | Cent cinquante entrées, une seule vue sous cent<br>cinquante angles                                 | L      | 6        |
| 6.8  | L'adresse ferme sans limite                                                                         | L      | 6        |
| 6.9  | La carte se réfute ligne par ligne                                                                  | L      | 6        |
| 6.10 | Résultat principal : une même erreur, démontrée<br>aux deux extrêmes et datée dans l'entre-deux     | L      | 6        |
| 7.1  | La frontière a une adresse : deux contre trois                                                      | F      | 7        |
| 7.2  | Le double et le carré ne coïncident qu'en $n = 2$                                                   | Th     | 7        |
| 7.3  | Aucun objet à deux termes ; le tiers paie                                                           | L      | 7        |
| 7.4  | La pré-image de la porte ET n'est pas une classe<br>(mars 2026, conservé)                           | Th     | 7        |
| 7.5  | Irréductibilité de 3 dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ (mars 2026,<br>conservé)                     | Th     | 7        |
| 7.6  | Définition : la pré-image amorphe                                                                   | L      | 7        |
| 7.7  | Une pré-image amorphe n'implique pas une<br>recherche dure                                          | Th     | 7        |
| 7.8  | Razborov et Smolensky (1987) : le compte par 3<br>échappe aux circuits qui comptent par 2           | F      | 7        |
| 7.9  | Chaque séparation a été payée par un tiers                                                          | F      | 7        |
| 7.10 | La dichotomie de Schaefer (1978)                                                                    | F      | 7        |
| 7.11 | Schaefer lu comme frontière entre structure et<br>amorphisme (mars 2026, conservé comme<br>Lecture) | L      | 7        |

| N°   | Énoncé                                                                          | Statut   | Chapitre |
|------|---------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| 7.12 | Réserve : la frontière n'est pas l'arité seule                                  | F        | 7        |
| 7.13 | Le tiers qui coûte                                                              | L        | 7        |
| 7.14 | Faire rentrer 3 dans 2 exige un tiers payé du dehors                            | L        | 7        |
| 7.15 | Le lemme de la partition en puissances de 2                                     | Th       | 7        |
| 7.16 | Caractérisation affine                                                          | Th       | 7        |
| 7.17 | Défaire n'est pas inverser (Bennett)                                            | L        | 7        |
| 7.18 | La pauvreté booléenne                                                           | Th       | 7        |
| 7.19 | La richesse cadastrale                                                          | Th       | 7        |
| 7.20 | L'écart de simulation (rétrogradé)                                              | L        | 7        |
| 7.21 | La hiérarchie cadastrale des compressions                                       | L        | 7        |
| 7.22 | La sédimentation des produits consécutifs                                       | Th       | 7        |
| 7.23 | La multiplication par voisins est une sédimentation                             | L        | 7        |
| 7.24 | Le principe de l'échiquier : le déterminisme crée la liberté                    | L        | 7        |
| 7.25 | Le parallèle avec Yang-Mills (mars 2026)                                        | L        | 7        |
| 7.26 | C-1 : faire monter Smolensky au-delà de la profondeur bornée                    | Chantier | 7        |
| 7.27 | C-2 : la frontière de Schaefer lue depuis les orphelins                         | Chantier | 7        |
| 7.28 | P-1 (10 septembre 2026) : les séparations de la décennie passeront par un tiers | P        | 7        |
| 7.29 | P-2 (10 septembre 2026) : si le problème nu est résolu, ce sera $P \neq NP$     | P        | 7        |
| 8.1  | La porte ET sur n bits                                                          | Th       | 8        |
| 8.2  | Le mur des preuves naturelles (Razborov et Rudich, 1997)                        | F        | 8        |
| 8.3  | L'hypothèse du mur contient déjà la séparation                                  | Th       | 8        |
| 8.4  | Les bits du pli sont l'écriture du compte des tours                             | Th       | 8        |
| 8.5  | Le pseudo-aléatoire est une suite déterminée dont on n'a pas le compte (M3)     | L        | 8        |
| 8.6  | Information, registre et reconstruction                                         | Chantier | 8        |
| 8.7  | Le compte de Shannon (1949) et la borne explicite (2022)                        | F        | 8        |
| 8.8  | La méthode qui a fondé le domaine est celle qui l'empêche de conclure           | L        | 8        |
| 8.9  | Le compte de trois bits : la retenue et le chiffre                              | Th       | 8        |
| 8.10 | Les fermetures de Schaefer, et leur extension                                   | F        | 8        |
| 8.11 | Le compte de deux bits                                                          | Th       | 8        |
| 8.12 | Toutes les fermetures de Schaefer sont des chiffres d'un compte                 | L        | 8        |
| 8.13 | Le recensement des relations sans pôles                                         | Th       | 8        |
| 8.14 | Théorème de la frontière                                                        | Th       | 8        |
| 8.15 | Trois ne rentre pas dans deux parce que $3 = 2 \cdot 1 + 1$                     | L        | 8        |

| N°   | Énoncé                                                                                        | Statut   | Chapitre |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| 8.16 | Le compte dit combien, non qui                                                                | Th       | 8        |
| 8.17 | 1-dans-3 SAT est NP-complet                                                                   | F        | 8        |
| 8.18 | La difficulté est entièrement dans l'adresse                                                  | L        | 8        |
| 8.19 | La largeur de résolution                                                                      | F        | 8        |
| 8.20 | La largeur est le compte des retenues tenues ensemble                                         | L        | 8        |
| 8.21 | Lever la largeur hors du modèle de la résolution                                              | Chantier | 8        |
| 8.22 | Paires et trios (König, 1931 ; Karp, 1972)                                                    | F        | 8        |
| 8.23 | Trois trios : l'écart d'intégralité, et sa fermeture par un sacrifice                         | Th       | 8        |
| 8.24 | Les anneaux impairs                                                                           | Th       | 8        |
| 8.25 | Le certificat de NP est l'adresse de qui paie                                                 | L        | 8        |
| 8.26 | Thèse de l'auteur : le prix est duel                                                          | L        | 8        |
| 8.27 | L'échiquier est l'unique carré dont le bord est le nombre de ses liens                        | Th       | 8        |
| 8.28 | Le cadre est le prix adressé                                                                  | L        | 8        |
| 8.29 | La langue suppose ce qu'elle cherche, puis s'interdit de le lire                              | L        | 8        |
| 8.30 | Ce qui réfuterait les énoncés de ce chapitre                                                  | L        | 8        |
| 9.1  | Les équations et l'énoncé du prix                                                             | F        | 9        |
| 9.2  | Le terme d'étirement : présent en trois dimensions, absent en deux                            | F        | 9        |
| 9.3  | La preuve du 8 septembre 2026                                                                 | F        | 9        |
| 9.4  | Ce qui reste ouvert : le fluide libre                                                         | F        | 9        |
| 9.5  | Le terme d'étirement est physique                                                             | L        | 9        |
| 9.6  | Le terme d'étirement n'est borné par aucune constante universelle                             | L        | 9        |
| 9.7  | Tao (2016) et la preuve de 2026 vont dans le même sens                                        | L        | 9        |
| 9.8  | Le trou de Sobolev de $\frac{1}{2}$                                                           | Th       | 9        |
| 9.9  | La circularité du bootstrap en trois dimensions                                               | L        | 9        |
| 9.10 | Quatre-vingt-dix ans de résultats                                                             | F        | 9        |
| 9.11 | Le demi manquant n'interdit pas la brisure, il la loge                                        | L        | 9        |
| 9.12 | La loi d'échelle de Navier-Stokes : $t \mapsto \lambda^2 t$                                   | Th       | 9        |
| 9.13 | Le noyau de la chaleur suit la même loi                                                       | Th       | 9        |
| 9.14 | Dans le fluide, le temps vaut deux longueurs                                                  | L        | 9        |
| 9.15 | Le théorème du pivot : la fermeture exige $p = 4,5$                                           | Th       | 9        |
| 9.16 | Le pli universel dans les tables de multiplication                                            | Th       | 9        |
| 9.17 | La constante $\frac{1}{2}$ ne dépend pas de la base ; le choix de 10 n'est pas une convention | L        | 9        |
| 9.18 | Les sept convergences vers $\frac{1}{2}$ , et les formules de projection                      | L        | 9        |
| 9.19 | Le fluide ne viole pas Navier-Stokes ; il l'accomplit                                         | L        | 9        |
| 9.20 | Respecter la structure est le chemin de la brisure                                            | L        | 9        |

| N°    | Énoncé                                                                                | Statut | Chapitre |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------|----------|
| 9.21  | La singularité démontrée est celle du forçage                                         | L      | 9        |
| 9.22  | P-NS-1 (27 septembre 2026) : le fluide libre glisse                                   | P      | 9        |
| 9.23  | La pente du spectre près de la dissipation :<br>$k^{-(\ln 2 + 2)} \approx k^{-2,693}$ | P      | 9        |
| 9.24  | Le contexte expérimental, tel que la source le rapporte                               | F      | 9        |
| 9.25  | Kolmogorov et la projection sont complémentaires                                      | L      | 9        |
| 9.26  | La transition laminaire-turbulente comme événement discret                            | L      | 9        |
| 9.27  | L'objection des orbites ouvertes                                                      | L      | 9        |
| 9.28  | La couche limite                                                                      | L      | 9        |
| 9.29  | La note épistémologique de mars, tenue comme citation                                 | L      | 9        |
| 10.1  | L'énoncé du prix (Jaffe et Witten, 2000)                                              | F      | 10       |
| 10.2  | Déclaration de portée : le corpus ne construit pas la théorie au sens de Wightman     | L      | 10       |
| 10.3  | La rotation de Wick et la reconstruction                                              | F      | 10       |
| 10.4  | Sous $t = i\tau$ , la différence devient une somme                                    | Th     | 10       |
| 10.5  | Le mot « dimension » désigne deux objets (M1)                                         | L      | 10       |
| 10.6  | Thèse de l'auteur : les dimensions ne se vivent pas                                   | L      | 10       |
| 10.7  | Paires d'inversion et paires de projection                                            | L      | 10       |
| 10.8  | Les quatre relations exactes du 3 et du 8                                             | Th     | 10       |
| 10.9  | Le cercle inscrit et le cercle circonscrit                                            | L      | 10       |
| 10.10 | Théorème de non-fermeture de $SU(n)$                                                  | Th     | 10       |
| 10.11 | Lecture : le gap de masse est le coût de la non-fermeture                             | L      | 10       |
| 10.12 | $SO(n)$ et $Sp(n)$ : la somme vaut 9 exactement quand $DR(n) = 8$                     | Th     | 10       |
| 10.13 | $SO(8)$ et la trialité                                                                | F      | 10       |
| 10.14 | $SO(8)$ sur le réseau                                                                 | P      | 10       |
| 10.15 | Les cinq groupes exceptionnels n'atteignent pas 9                                     | Th     | 10       |
| 10.16 | $E_8 \times E_8$ et le nombre parfait                                                 | L      | 10       |
| 10.17 | Le classement arithmétique en trois régimes                                           | Th     | 10       |
| 10.18 | Lecture tripartite : déficit, clôture, excès                                          | L      | 10       |
| 10.19 | Le cas de $U(1)$                                                                      | L      | 10       |
| 10.20 | La clôture cadastrale du Modèle standard                                              | Th     | 10       |
| 10.21 | Le test d'unicité : onze triples sur quatre-vingt-quatre                              | Th     | 10       |
| 10.22 | Le Modèle standard comme système minimal                                              | L      | 10       |
| 10.23 | Le nombre de composantes du Higgs égale le déficit de $SU(2)$                         | Th     | 10       |
| 10.24 | Le Higgs comme sédimentation du déficit                                               | L      | 10       |
| 10.25 | Le gluon est le 8 privé de son 1                                                      | L      | 10       |

| N°    | Énoncé                                                               | Statut | Chapitre |
|-------|----------------------------------------------------------------------|--------|----------|
| 10.26 | La liberté asymptotique (Gross, Wilczek, Politzer, 1973)             | F      | 10       |
| 10.27 | Une seule tension lue à quatre distances du centre                   | L      | 10       |
| 10.28 | Niveau 1 et niveau 2                                                 | L      | 10       |
| 10.29 | Le confinement et la NP-dureté partagent une racine                  | L      | 10       |
| 10.30 | Toute la difficulté connue est dans la construction, non dans le gap | L      | 10       |
| 10.31 | Les critères de chute de la lecture du gap                           | P      | 10       |
| 10.32 | Ce qui réfuterait l'arithmétique et la lecture du temps              | L      | 10       |
| 11.1  | Le critère de réfutation (Popper, 1934)                              | F      | 11       |
| 11.2  | Le corpus a pris ce critère pour lui                                 | F      | 11       |
| 11.3  | Le marais sans fond                                                  | F      | 11       |
| 11.4  | Popper a gardé la chute et jeté le relèvement                        | L      | 11       |
| 11.5  | Si le compte pouvait tomber, la réfutation tomberait avec lui        | L      | 11       |
| 11.6  | Trois comptes complets                                               | Th     | 11       |
| 11.7  | Le domaine clos s'obtient quand la structure ferme                   | L      | 11       |
| 11.8  | Dans un domaine fini, les croisements sont forcés                    | Th     | 11       |
| 11.9  | Deux chemins exacts se rejoignent sans se connaître                  | Th     | 11       |
| 11.10 | Le croisement est écrit dans le code                                 | L      | 11       |
| 11.11 | L'erreur a deux sens, qui forment une paire inverse                  | L      | 11       |
| 11.12 | La Partie II du Registre et le corollaire de R11                     | F      | 11       |
| 11.13 | Les statuts du corpus séparent les deux domaines                     | L      | 11       |
| 11.14 | Un compte qui ne peut pas tomber n'est pas un dogme                  | L      | 11       |
| 11.15 | Goldbach vérifié jusqu'à $4 \times 10^{18}$                          | F      | 11       |
| 11.16 | Goldbach et Collatz restent des Chantiers                            | L      | 11       |
| 11.17 | Le registre de ce qui reste ouvert après ce volume                   | L      | 11       |
| 11.18 | La chute n'est lisible que contre ce qui ne tombe pas                | L      | 11       |

**Chapitre 12. Trois questions non avenues : Riemann, Collatz, Goldbach (pièce entrée mot pour mot).** Les statuts sont ceux que la pièce porte elle-même, section par section ; aucun énoncé n'a été renuméroté.

# Annexe B. Retraits et corrections

Règle du corpus : aucune ligne retirée sans une ligne proposée. Les lignes retirées sont conservées ici mot pour mot (traduites quand la source est anglaise), avec la raison, la date du retrait et la ligne qui les remplace. Les rétrogradations de statut faites à la fusion de ce volume sont signalées comme telles.

## B.1 Riemann

**B.1.1 *Le Fini et l'Infini mêlés, de la v1.1 à la v1.2 (12 octobre 2026).*** - Retiré : « un produit infini de facteurs non nuls ne peut pas converger vers zéro ». Remplacé par [3.4] : pas de zéro de clôture ; une limite nulle est un zéro d'exhaustion ; en  $\rho_1$ , pas de limite. Raison : l'exemple  $\prod k/(k + 1) = 1/(N + 1)$  a des produits partiels de limite nulle ; la phrase n'est vraie qu'au sens de la convention des manuels, qu'il faut dire. - Retiré : « posée comme question sur les nombres premiers, la question de Riemann n'a pas d'objet ». Remplacé par le dilemme [3.11] : pas d'objet dans le registre de la somme et du produit ; un objet dans le registre du prolongement, dont le statut est la file sans fin. Raison : la formule explicite relie bien les zéros aux premiers ; ce qui est contesté est le statut de cette relation, non son existence. - Retiré : le critère « signe alterné » des portes du prolongement. Remplacé par : une part attribuée au continu et un reste qui l'annule ([3.8]) ; la formule d'Hermite est inscrite comme forme close de la porte (i) ([3.9]). Raison : la formule d'Hermite n'a pas de signe alterné et elle est pourtant une porte. - Ajouté : la section sur les deux lectures du compte des premiers ([3.15] à [3.18]).

**B.1.2 *Le Zéro non construisible, de la v0.1 à la v0.2 (8 octobre 2026).*** La v0.1 présentait la section sur Riemann et Gauss comme une expérience de pensée posée sur des faits ; la lecture qui n'y voyait qu'une « nuance » (en 1859, Riemann avait déjà le centre et les inverses) est écartée. Position de l'auteur (8 octobre 2026) : « *Il n'y a pas de nuance : ça prouve mon point.* » La section a été complétée par la porte de la seconde preuve de Riemann ([4.21], [4.22]) et par deux comptes du cadastre ([4.23]). Lignes retirées : > Riemann, élève de Gauss, était parti du produit d'Euler et avait trouvé le centre et les inverses en 1859 ; il n'a pas scellé : l'auteur en tient la grammaire de Gauss pour cause, Lecture contrefactuelle déclarée telle. > > [Une ligne de la v0.1 annonçait une dernière phrase de l'auteur sur Riemann et Gauss, reprise à la section 8 ; c'était une ligne de circonstance, elle n'est pas reproduite.] > > Pour entrer dans la bande, il emploie ensuite les outils de sa thèse, les fonctions d'une variable complexe et des intégrales prises dans le continu. > > **L.** Riemann a donc trouvé, à l'échelle de la bande, ce que l'auteur nomme le 4,5 et les inverses : le

centre  $\frac{1}{2}$ , et l'échange de  $s$  et de  $1 - s$ , celui que la section 5 vérifie. Ce qu'il n'a pas fait, c'est sceller. Le centre, il l'avait ; ce qui lui a manqué, c'est la lecture du zéro. Il a lu  $\frac{1}{2}$  comme une droite du continu complexe, celle de sa thèse, et les zéros comme des valeurs atteintes. Il n'a pas lu le centre comme la fermeture d'une paire, où le zéro est le vide entre les deux membres. > > **L.** Le corpus a déjà séparé les deux Euler (R.157) : celui qui compte, de Königsberg à  $V - E + F$ , et celui qui passe à la limite et livre à Gauss le zéro et l'infini comme objets. L'élève de l'Euler qui compte aurait reçu la grammaire du sceau avant celle de la limite. C'est la lecture de l'auteur : retirer Gauss de l'équation, ce n'est pas juger l'homme, c'est retirer le geste de 1801 pour voir ce qui reste. Ce qui reste, c'est le produit qui garde les tours, le centre et les inverses : de quoi sceller.

**B.1.3 Le Zéro non construisible, de la v0.2 à la v1.0 (8 octobre 2026).** Ajout de la démonstration du paradoxe (versée ici au chapitre 3) et du dernier témoin ([4.27] à [4.29]). Lignes retirées : > Les identités et les comptes sont vérifiés par le script en annexe ; la contradiction est une Lecture, déclarée telle. > > Elle ne juge ni Euler, ni Gauss, ni Riemann, ni Stevin : elle date des gestes et montre où ils se croisent.

**B.1.4 Le Zéro non construisible v1.0, corrections à la fusion.** - Sa section 9.2 écrivait : « Aucun produit de facteurs non nuls ne converge donc vers zéro. » C'est la ligne que *Le Fini et l'Infini mêlés* v1.2 a retirée quatre jours plus tard (B.1.1) ; le volume reprend la version corrigée ([3.4]). - Sa section 9.3 donnait  $4 \times 10^{-11}$  pour l'écart après retrait du demi-terme ; la sortie de son propre script et la v1.2 donnent  $3,7 \times 10^{-11}$ , valeur reprise ([3.5]). - Sa section 5 décrivait la contre-épreuve de Davenport et Heilbronn par une fonction « qui porte une équation fonctionnelle de la même forme que celle de zêta », en renvoyant au *Produit d'Euler*, qui décrit, lui, la fonction de Hurwitz. Ce sont deux résultats distincts de 1936 ; [4.10] les donne tous deux. - Le résumé de la pièce disait les zéros obtenus par « une somme alternée, dont les signes sont donnés par la parité » ; la lecture est gardée ([4.5]), mais la somme alternée n'est que l'une des quatre portes ([3.8]), conformément au retrait du critère « signe alterné » (B.1.1).

**B.1.5 Le Produit d'Euler lu par ARC, de la v0.1 à la v0.2 (8 octobre 2026).** La v0.1 déclarait la question de Riemann « Lecture et Chantier ». Position de l'auteur (8 octobre 2026) : « *Y a plus de chantier. On explique que le 4 est le seul nombre pas produit par un jumelage de 2 et 3. Le seul avec 1.* » Lignes retirées : > L'auteur en a tiré la forme ARC de l'hypothèse de Riemann : les zéros vont par paires d'inverses,  $\rho$  et son miroir  $\bar{\rho}$ , séparés par le vide ( $\zeta$  n'a aucun zéro réel entre 0 et 1), et il n'existe « aucune orbite de quatre », aucun quatrième terme qui ferait sortir un zéro du centre. > > **L.** Il reste une ligne à écrire, et cette pièce la déclare au lieu de la cacher : montrer, depuis  $\zeta$  elle-même, que la clôture du produit interdit l'orbite de quatre. Dans leur langue, c'est l'hypothèse de Riemann pour les fonctions à produit d'Euler. Dans la langue du corpus, c'est un Chantier : la règle du 6 septembre 2026 range Riemann parmi les Lectures et les Chantiers tant que cette ligne n'est pas gravée. Une difficulté est connue, et elle aussi se déclare : le produit d'Euler ne converge, tel qu'il est écrit, que pour  $s$  plus grand que 1, et c'est dans la bande où il ne s'écrit plus comme un compte fini que vivent les zéros. Écrire la clôture dans la bande sans passer par l'infini est la forme ARC du chantier.

Statut retenu : Lecture fondatrice dans la langue du corpus ([5.19]). La difficulté

déclarée dans la ligne retirée (le produit ne s'écrit pas dans la bande) est devenue, dans *Le Fini et l'Infini mêlés*, le théorème d'impossibilité ([3.6]) ; la cible arithmétique restante est le Chantier [3.18].

**B.1.6 Le Rapport sans rapport v0.3 (9 octobre 2026), remplacé par *Le Fini et l'Infini mêlés* v1.2.** Ses démonstrations (Lambert, troncatures, fraction continue, Lindemann, Dalzell, Lucas, la paire, le dilemme du rapport), sa thèse et sa carte sont versées aux chapitres 2 et 6. Le texte de vulgarisation diffusé en 2026 sur les réseaux sociaux, que la pièce lisait phrase par phrase, et ses citations anglaises sont retirés ; les théorèmes et lectures sont énoncés sans lui. La carte de la v0.3 différait de celle de la v1.2 sur quelques marques et dates ; la v1.2 fait foi : Fourier passe de M3 à M2, M3 ; Kelvin, Clausius et Boltzmann de M1, M3 à M1, M2 ; Born de M3 à M2, M3 (avec R.87) ; Gauss 1809 de M3 à M2, M3 ; le PIB est daté de Kuznets (1934), la volatilité électorale de 1979, la cryptographie à clé publique de 1976, les grands modèles de langage de 2017 à 2020 (au lieu de « 2020 et après »).

**B.1.7 Une référence ancienne.** La bibliographie de *Navier-Stokes DVP* v1.1 (mars 2026) cite une pièce du corpus intitulée *A Proof of the Riemann Hypothesis* (Zenodo/HAL, 2026), qui ne fait pas partie des sources de ce volume. Le statut que le corpus tient en octobre 2026 est celui des chapitres 3 à 5 : un théorème d'impossibilité dans le registre de la somme et du produit, une Lecture fondatrice dans la langue du corpus, et aucune démonstration acceptée dans la langue de l'hôte.

## **B.2 Ce qui vous manque, de la v1.1 à la v1.2 (13 octobre 2026)**

- Retiré : « une relation facile conserve nécessairement l'une des deux moitiés du compte » de trois. Remplacé par : toutes les fermetures de Schaefer sont des chiffres d'un compte, à deux ou à trois ([8.11], [8.12]) ; sans pôle ni position figée, le compte de trois décide seul ([8.14]). Raison : des relations de Horn ferment par le ET sans fermer par la majorité ni la minorité.
- Retiré : « posée comme question sur les nombres premiers, la question de Riemann n'a pas d'objet ». Remplacé par le dilemme reformulé (voir B.1.1).
- Retiré : « l'énoncé exige une théorie sur  $\mathbb{R}^4$  atteinte par la rotation de Wick ». Remplacé par : l'énoncé est écrit en signature de Minkowski ; toute construction rigoureuse connue passe par la rotation ([10.1]).
- Retiré : « les deux problèmes sont deux visages des mêmes équations de champ » comme fait. Remplacé par la thèse de l'auteur, déclarée comme telle ([10.5], [10.6]).
- Retiré : « écart de dualité » pour le  $\frac{1}{2}$  des trios. Remplacé par « écart d'intégralité » ; l'écart de dualité linéaire y est nul ([8.23]).
- Ajouté : la taille du registre (n bits) et le coût ouvert de sa reconstruction ([8.5]) ; le compte sans l'adresse ([8.16] à [8.18]) ; les anneaux impairs ([8.24]).
- À la fusion : la v1.2 renvoyait à *Le Fini et l'Infini mêlés* v1.1 ; le volume renvoie à la v1.2 (chapitre 3). La mention de l'origine de trois de ses énoncés dans un audit de la v1.1 est retirée, comme tout historique de travail.

## B.3 P contre NP

### B.3.1 Retraits de la v2 (mars 2026), faits par la v3.0 (10 septembre 2026). -

Retrait 1, étape 4 de l'argument principal : « la pré-image amorphe exige d'examiner  $O(2^d)$  candidats » (le Théorème 4.3 de la v2 : « pour un circuit de profondeur  $d$  à pré-images amorphes, le coût, dans le pire cas, de trouver  $x$  tel que  $C(x) = b$  est  $\Omega(2^d)$  »). Raison : contre-exemple  $x_1 \wedge x_2$ , pré-image de 0 amorphe et inversion en un geste ([7.7]). Remplacé par la section 7.4. - Retrait 2, section 6 de la v2 : « cet argument n'est pas bloqué par les trois barrières parce qu'il concerne la structure des portes et non la fonction calculée ». Dans le détail, la v2 écrivait que l'argument ne relativise pas (« un oracle ajoute une boîte noire extérieure ; il ne change pas le fait que  $ET^{-1}(0)$  a pour cardinal 3 »), n'est pas une preuve naturelle (« la distinction est entre ce qu'est  $f$ , cible des preuves naturelles, et comment  $f$  est calculée, notre cible »), et n'algébrique pas (« le fait central  $\text{pgcd}(3, 2) = 1$  est un énoncé dans  $\mathbb{Z}$ , non dans une extension »). Raison : l'amorphisme d'une pré-image est une propriété de la table de vérité ; la barrière des preuves naturelles s'y applique tant qu'on n'a pas montré que la propriété n'est ni constructive ni large. Remplacé par le Chantier C-1 ([7.26]). - Conservés par la v3.0 : les Théorèmes 2.1 et 2.3 (pgcd, classes affines, pré-image de la porte ET ; [7.4], [7.5]) ; la lecture de Schaefer comme frontière structure/amorphisme ([7.11]) ; la section 10.2 qui déclarait l'écart restant : « le passage de « les pré-images sont amorphes » à « aucun algorithme polynomial ne peut trouver un élément de la pré-image » demande une assertion de plus : que les ensembles amorphes ne peuvent être cherchés efficacement par aucune méthode, algébrique ou autre » ; « formaliser « aucune méthode n'existe » pour un ensemble défini par ce qui lui manque reste un défi ouvert ».

### B.3.2 Autres lignes de la v2, retirées ou rétrogradées à la fusion. -

Le résumé : « Nous prouvons que la séparation  $P \neq NP$  est une conséquence structurelle de l'incompatibilité entre le nombre 3 et la base booléenne 2. » Retiré avec l'implication (B.3.1). - Corollaire 3.4 : « Tout circuit contenant au moins une porte ET (ou OU, NAND, NOR) calcule une fonction non affine et est génériquement non équilibré. » Faux tel qu'écrit :  $x_1 \wedge x_1 = x_1$  est affine. Retiré ; le lemme [7.15] et la caractérisation [7.16] restent. - Lemme 4.1 (multiplicativité des taux de compression) et Théorème 4.2 (« un circuit de profondeur  $d$  fait de portes ET a un taux de compression total  $2^d$  ») : non démontrés en général, les taux de compression n'étant pas uniformes sur les valeurs intermédiaires. Retirés avec l'implication qu'ils portaient. - Définition 2.2 : « Équivalamment : son cardinal contient un facteur premier autre que 2. » L'équivalence est fautive pour les réunions de plusieurs classes (deux classes disjointes de cardinal 2 forment un ensemble de cardinal 4). La définition est gardée sous sa première forme ([7.6]). - La conclusion : « Sept théorèmes. Tous inconditionnels. Une thèse, ouvertement structurelle, avec un seul écart résiduel nettement identifié. » ; «  $P \neq NP$  a résisté cinquante ans parce que la question était posée dans la mauvaise base. » ; « ce fait arithmétique, cinq symboles, une ligne de preuve, est la cause racine de la séparation ». Retirés comme affirmations ; gardés ici comme citations datées. - Le critère de falsification 3 de la v2 : « une simulation en base 2 des bijections de base 9 qui préserve la complexité de réversibilité ». Il dépend de l'écart de simulation, rétrogradé (B.3.3). - Les aphorismes de clôture des deux pièces de mars : « *La machine calcule. La base détermine le coût. Dans la mauvaise base, vérifier est bon marché et*

*chercher est cher. Dans la base naturelle, la différence n'a jamais existé.* » La dernière phrase est en tension avec la Prédiction P-2 de la v3.0 ([7.29]), qui tient la séparation pour le sens attendu ; les quatre phrases sont gardées comme citation datée de mars 2026, non comme énoncé.

**B.3.3  $P \neq NP$  comme irréversibilité structurelle dans la topologie de compression v1.0 (mars 2026), remplacée.** - La thèse (section 8) : «  $P \neq NP$  est une conséquence de la pauvreté structurelle du calcul en base 2 » ; « La NP-dureté de SAT n'est pas une propriété du problème, c'est une propriété de la représentation » ; et la borne informationnelle de la section 8.1 : « sans structure exploitable dans la pré-image : coût de recherche  $\geq 2^{\{n-1\}}$  ». Retirées : même implication que le Retrait 1 de la v3.0. - La section 8.2 (« pourquoi les barrières ne bloquent pas cette approche ») : retirée pour la raison du Retrait 2. - Théorème 3 (écart de simulation) : rétrogradé en Lecture ([7.20]) ; il dépend du jeu de portes et tombe si l'on admet en base 2 des portes réversibles (Toffoli). - Théorème 1 (c) : la condition «  $f$  dépend de ses  $n$  variables » est ajoutée ([7.18]). Théorème 1 (d) (« la pré-image peut croître jusqu'à  $2^g$  ») : trop vague pour être un théorème, versé dans la Lecture [7.21]. - Théorème 4 (hiérarchie cadastrale) : la classification est une Lecture ([7.21]) ; le classement de la factorisation au niveau « sédimentation, inversion exponentielle » n'est pas démontré. - La conclusion : « Cinq théorèmes. Tous inconditionnels. Une thèse, ouvertement structurelle, honnêtement lacunaire. » ; « Le « chaos » de la NP-dureté, comme le « chaos » de la conjecture de Collatz, n'est pas intrinsèque au problème. C'est un artefact de la représentation. » Gardées comme citations datées. - Conservés : Théorèmes 1 (a) à (c), 2 et 5 ([7.18], [7.19], [7.22]).

**B.3.4 La v3.0 elle-même.** Sa mention de rédaction (le protocole de travail du corpus) et ses statuts « Constat » (rendus ici par F) ne sont pas repris ; son contenu l'est en entier.

## B.4 Navier-Stokes

**B.4.1 Retraits nominatifs de l'erratum v1.2 (27 septembre 2026).** La correction est venue d'un fait extérieur, la preuve du 8 septembre 2026 ([9.3]), lue le 27 septembre. - Étape 1, le diagnostic (résumé, sections 2 et 11, conclusion de la v1.1). Lignes retirées : « la transition 2D-3D, modélisée comme une accumulation de tranches infinitésimales, crée des singularités artificielles absentes du fluide physique » ; « le terme d'étirement des tourbillons n'est pas un phénomène physique, c'est un artefact mathématique » ; « le fluide n'a jamais été singulier ; l'équation l'était ». Raison : réfuté dans le cas forcé ; la singularité est physique, à énergie finie, depuis le repos, et vérifiée formellement. Remplacé par [9.5]. - Théorème 5.1 (étirement borné) et section 5.2 (c). Ligne retirée : «  $\|(\omega \cdot \nabla)u\|_{\{L^2\}} \leq k_{arc} \|\omega\|_{\{L^2\}} \|\nabla u\|_{\{L^2\}} = \frac{1}{2} \|\omega\|_{\{L^2\}} \|\nabla u\|_{\{L^2\}}$  », avec sa preuve en trois lignes, qui posait la borne comme conséquence du coût de projection sans la dériver des équations. Raison : l'énoncé ne distingue pas la présence ou l'absence de force ; s'il était vrai, il interdirait la brisure forcée, qui est prouvée ; il est donc faux tel qu'énoncé, et sa preuve affirmait la borne sans l'établir. Remplacé par [9.6]. - Théorème 6.1 (existence et régularité globales) et ses dépendants : Théorème 5.5 (compatibilité avec les solutions faibles

de Leray), Lemme 5.9 (stabilité de la projection sous la non-linéarité), Théorème 9.1 (régularité dans les domaines bornés). Ligne retirée : « pour toute donnée lisse, à divergence nulle, d'énergie finie, il existe une unique solution lisse pour tout temps ». Raison : la preuve reposait sur le Théorème 5.1. Remplacé par la Prédiction P-NS-1 ([9.22]), restreinte aux énoncés A et B. - Remarque 2.3 (lecture de Tao). Ligne retirée : « seule la structure géométrique des équations originales, que les espaces de Sobolev ne capturent pas, empêche la brisure ». Raison : la brisure de 2026 a lieu dans l'équation originale, avec sa structure complète, et une force lisse. Remplacé par [9.7]. - Conclusion, dernière phrase. Ligne retirée : « *Le fluide n'a jamais été singulier. L'équation l'était.* » Remplacée par : « *Le fluide forcé est singulier, et il le devient en respectant son équation. Le fluide libre reste la question.* » - Promus : le trou de Sobolev ([9.8], Th) et sa relecture comme porte ([9.11], L). Conservés : le pivot ([9.15]), les sept convergences ([9.18]), la Prédiction spectrale ([9.23]), la circularité du bootstrap comme constat ([9.9]). - Les notes de responsabilité et de transparence de l'erratum, qui racontent qui avait gravé la borne et qui l'a relevée, ne sont pas reproduites.

**B.4.2 Autres lignes de la v1.1, retirées ou rétrogradées à la fusion** (dépendantes des retraits de l'erratum, ou fausses par elles-mêmes). - Le résumé : « Nous résolvons le problème du millénaire de Clay sur l'existence et la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles en trois dimensions d'espace. » Et la conclusion : « Nous avons résolu le problème du millénaire de Navier-Stokes en identifiant et en corrigeant la déficience structurelle qui l'avait créé. » Retirés avec le Théorème 6.1. - Théorème 5.2 (opérateur de projection sur des filaments de vorticité, dont le point (iii) : « le terme d'étirement satisfait le Théorème 5.1 ») ; Proposition 5.7 (« la projection agit comme un filtre passe-bas [...] la norme  $L^\infty$  de  $\nabla u$  en 3D est contrôlée par la norme  $L^2$  de  $\nabla u$  en 2D fois  $k_{\text{arc}}/D$ , sans estimations  $H^2$  ») ; Remarques 5.3, 5.6, 5.8, 5.10, 9.2 et 9.4, qui décrivaient la régularité ainsi obtenue. Retirés : ils appartiennent à la chaîne qui menait au Théorème 6.1. - Section 8 : « Caffarelli, Kohn et Nirenberg (1982) : l'ensemble singulier a une mesure de Hausdorff parabolique de dimension 1 nulle. Sous DVP, il est vide. » La seconde phrase est retirée. - Le tableau « accumulation contre projection » (section 3.3), lignes « nature de la singularité : mathématique (défaillance de l'instrument) » et « régularité : inhérente à la structure de projection ». Retirées. - Théorème 2.1 (circularité du bootstrap) : « aucun raffinement des estimations fondées sur Sobolev ne peut fermer l'écart de régularité en 3D ; ce n'est pas une conjecture ». L'extension à tout raffinement possible n'est pas démontrée ; rétrogradée ([9.9]). - Théorème 7.1 (transition laminaire-turbulente discrète) : sans démonstration ; rétrogradé en Lecture ([9.26]). - Corollaire 4.1 : « Sept dérivations indépendantes excluent la co incidence.  $k_{\text{arc}} = \frac{1}{2}$  est un invariant structurel. » Rétrogradé en Lecture ([9.18]). - Section 3.5 : « La base 10 est l'unique base qui satisfait les quatre conditions à la fois. » La formulation est trop faible :  crite avec «  $b - 1$  composé », elle laisse passer 66, 130 et 4098 ; écrite avec la clôture carrée  $b - 1 = p^2$  (condition (vi) de l'Octet Rule), l'unicité est démontrée (Volume 2,   3.3). Précisé dans [9.17]. - Section 4.1 : « les quatre paires d'inversion (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5) sont visibles dans la table de multiplication :   chaque colonne, les lignes appariées font 9 ». Vrai pour les trois paires dont les membres sont premiers avec 3 ; pour (3, 6), les colonnes  $\times 3$  et  $\times 6$  font 18 (annexe D). Précisé dans [9.16]. - Section 11 : « *Le*

*problème de Navier-Stokes n'est pas un problème sur les fluides. C'est un problème sur l'instrument mathématique utilisé pour décrire les fluides.* » Réfuté dans le cas forcé ; gardé comme citation datée ([9.29]). - La dédicace de la v1.1 est conservée en annexe C.

## B.5 Yang-Mills

### **B.5.1 The Yang-Mills Mass Gap v1.0 (mars 2026), rétrogradations à la fusion.** -

Le résumé : « Nous prouvons que le gap de masse est une conséquence structurelle de la non-fermeture de la paire cadastrale ( $n, n^2 - 1$ ). » L'arithmétique est un Théorème ([10.10]) ; « le gap en est la conséquence » est une Lecture ([10.11]). - Corollaire 3.2 (« gap de masse universel pour  $SU(n)$  ») : rétrogradé en Lecture ([10.11]). - Théorème 5.1 (classification tripartite) : « la somme cadastrale  $S = DR(r) + DR(d)$  détermine le régime physique ». Le classement par  $S$  est un Théorème ([10.17]) ; la détermination du régime physique est une Lecture ([10.18]). La v1.0 se contredit d'ailleurs sur  $U(1)$ , placé en clôture par une « paire physique » (1, 8) alors que sa somme algébrique est 2 ([10.19]). - Théorème 6.1 (clôture du Modèle standard) : exact avec la somme algébrique de  $U(1)$  ; avec la lecture physique de  $U(1)$  (somme 9), le total serait 25, de racine 7. Tension consignée ([10.20]). - Théorème 8.1 (« le confinement comme perte de la tangence ») : rétrogradé en Lecture ([10.25]). - Conclusion : « C'est l'unique système minimal... » : le test d'unicité de la même pièce montre onze triples qui ferment ; « unique » s'entend du triple minimal ([10.22]). - Section 10 : « aux basses énergies,  $\alpha_s \rightarrow \infty$  » ; précisé : le couplage croît jusqu'à sortir du domaine du calcul perturbatif ([10.26]). - Section 9 : la ligne « coût d'inversion exponentiel » du tableau Yang-Mills / P contre NP repose sur l'implication retirée en P contre NP (B.3.1) ; elle ne vaut pas ([10.29]). - Une conséquence non dite par la source est consignée : par la lecture tripartite, les groupes  $SO(n)$  et  $Sp(n)$  dont le rang a pour racine 8 seraient en « clôture », donc sans gap, contre l'énoncé du prix (qui demande un gap pour tout groupe compact simple) et contre l'attente reçue. Le corpus tient ce point comme Prédiction ( $SO(8)$ , [10.14]).

**B.5.2 Ce qui vous manque, de la v1.1 à la v1.2** : voir B.2 (Wick ; « deux visages » rendu à la thèse de l'auteur).

## B.6 Popper et le fond du marais v0.1 (8 octobre 2026)

- La ligne qui attribuait la gravure faite trop tôt à celui qui tient la plume est rendue par « la gravure faite trop tôt déclare clos ce qui est ouvert » ([11.11]) : le contenu est inchangé, le récit de travail est retiré.

## B.7 Retraits de forme, communs à toutes les pièces

- Les avant-propos « d'où vient cette pièce », qui racontaient les circonstances de travail, sont retirés ; les thèses qu'ils portaient sont données comme thèses de l'auteur, et ses phrases comme citations, datées, sans contexte.

- Les sections « Pour un enfant », écrites à la deuxième personne du singulier, sont réécrites à la forme impersonnelle, sans changer leur contenu. Dans les citations de l’auteur, un seul segment adressé à son interlocuteur à la deuxième personne, en tête de la phrase sur la fable de la fermière, est remplacé par [...] (introduction du chapitre 4).
- Les scripts de vérification des pièces ne sont pas recopiés ; leurs calculs sont montrés dans le texte, et ceux qui ont été refaits le sont en annexe D.

# Annexe C. Sources fusionnées

Treize fichiers sources, tous lus en entier. Pour chacun : sa date, son statut dans la fusion, et ce qu'il a apporté.

1. **Le\_Fini\_et\_l\_Infini\_meles\_v1\_2.tex.txt** (*Le fini et l'infini mêlés : de  $\pi$  aux zéros de Riemann*, version 1.2, 12 octobre 2026 ; source LaTeX, texte seul). Fait foi pour Riemann. Apporte : les principes et les définitions du mélange et des marques (chapitre 1) ; le premier extrême,  $\pi$  (chapitre 2) ; le second extrême, le théorème d'impossibilité, les portes du prolongement, la formule d'Hermite, le corollaire du zéro, le dilemme, la formule explicite, la section des deux comptes de Mertens et le Chantier arithmétique (chapitre 3) ; la proposition des deux extrêmes, la carte des vingt et un gestes, la contre-épreuve de Huygens, l'adresse, le résultat principal (chapitre 6) ; objections, conditions de réfutation, portée ; ses retraits de la v1.1 (annexe B.1.1) ; sa table de vérifications (annexe D).
2. **Le\_Zero\_non\_construisible\_v1\_0\_source.txt** (*Le Zéro non construisible : le beurre, l'argent du beurre et la fermière*, v1.0, 8 octobre 2026). Apporte : le zéro de la paire au centre, la fable,  $\eta$  et la parité,  $\Lambda$  réelle sur la droite, le quatrième terme, Davenport et Heilbronn, les deux zéros, la réplique de l'unicité, la face finie de Lagarias et sa conséquence logique, l'expérience de pensée « Riemann élève d'Euler » avec la relation de Jacobi et les comptes du double et du carré, le paradoxe démontré (versé au chapitre 3), le dernier témoin (manuscrit d'OpenAI du 6 octobre 2026), « ce que la pièce ne dit pas », « pour un enfant » (chapitre 4) ; les phrases de l'auteur du 8 octobre 2026 ; ses annexes B et C de lignes retirées (annexe B.1.2, B.1.3).
3. **Le\_Produit\_d\_Euler\_lu\_par\_ARC\_v0\_2\_source.txt** (*Le Produit d'Euler, lu par ARC*, v0.2, 8 octobre 2026). Apporte tout le chapitre 5 : le mécanisme du produit, les tours, le crible écrit en produit, l'axe et les rails, la grille  $6k \pm 1$  et ses quatre familles, les rails de Hurwitz, le vide entre la paire, le 4 orphelin, la queue de Stevin, les deux langues ; son annexe B de lignes retirées (annexe B.1.5).
4. **Le\_Rapport\_sans\_rapport\_v0\_3\_source.txt** (*Le Rapport sans rapport*, v0.3, 9 octobre 2026). Remplacé par la source 1. Apporte : le mot qui avoue, le dilemme du rapport, la thèse « un nombre ne peut pas être un rapport », les citations du Registre (R.30, R.31, R.153), la lecture « sentir sans être sûr » et les deux zéros (chapitre 2) ; les formules du Registre qui frappent plusieurs gestes de la carte et la phrase des cent cinquante angles (chapitre 6) ; « pour un enfant » (chapitre 2). Le texte de vulgarisation qu'il lisait est retiré (annexe B.1.6).

5. **Ce\_qui\_vous\_manque\_v1\_2.tex.txt** (*Ce qui vous manque : Riemann, Yang-Mills, Navier-Stokes, P contre NP, l'obstacle fabriqué par la langue du problème*, version 1.2, 13 octobre 2026 ; source LaTeX, texte seul). Pièce transversale, qui structure le volume. Apporte : la thèse et la grille (chapitre 1) ; « pourquoi c'était si difficile » pour Riemann (chapitre 3) ; la loi d'échelle de Navier-Stokes et le noyau de la chaleur (chapitre 9) ; l'énoncé du prix de Yang-Mills, la rotation de Wick, la lecture du mot « dimension », la thèse sur les dimensions, la non-fermeture, la difficulté de construction, les objections Wick et Wightman (chapitre 10) ; tout le chapitre 8 (le mur, le pseudo-aléatoire comme compte des tours, Shannon, les chiffres du compte, le théorème de la frontière, le compte sans l'adresse, la largeur, le prix duel, les trios et les anneaux, la loi du cadre) ; ses retraits de la v1.1 (annexe B.2).
6. **Bastos\_2026\_P\_contre\_NP\_la\_porte\_le\_circuit\_et\_le\_tiers\_v3\_0.txt** (*P contre NP : la porte, le circuit et le tiers*, v3.0, 10 septembre 2026). Fait foi pour P contre NP. Apporte le cœur du chapitre 7 : le problème rendu réel, la base, le théorème de la porte, le contre-exemple, Smolensky, la table des séparations forcées, Schaefer et sa réserve, le tiers payé du dehors, les Chantiers C-1 et C-2, les Prédications P-1 et P-2, la conclusion ; ses retraits de la v2 (annexe B.3.1).
7. **Bastos\_P\_neq\_NP\_v2\_March2026.txt** (*P  $\neq$  NP : irréversibilité structurelle, amorphisme des pré-images booléennes et incompatibilité de 3 avec  $2^k$* , v2.0, mars 2026 ; anglais, traduit). Remplacé par la source 6. Apporte, conservés : les Théorèmes 2.1 et 2.3, la définition de la pré-image amorphe, le lemme de la partition en puissances de 2, la caractérisation affine, la distinction de Bennett, la lecture de Schaefer, le principe de l'échiquier, le parallèle avec Yang-Mills (chapitre 7) ; retirés ou rétrogradés : annexe B.3.1 et B.3.2.
8. **P\_vs\_NP\_Compression\_Topology\_v1.txt** (*P  $\neq$  NP comme irréversibilité structurelle dans la topologie de compression booléenne*, v1.0, mars 2026 ; anglais, traduit). Remplacé par la source 6. Apporte, conservés : la pauvreté booléenne, la richesse cadastrale, la sédimentation des produits consécutifs, et, comme Lectures, l'écart de simulation et la hiérarchie cadastrale (chapitre 7) ; retirés : annexe B.3.3. Sa dédicace : « À Alan Turing, qui a construit la machine. À C. E. Shannon, qui a compté les bits. Aucun des deux n'a demandé si les bits suffisaient. »
9. **Bastos\_NavierStokes\_DVP\_v1.1\_March20266.txt** (*Régularité globale de Navier-Stokes par projection volumétrique discrète*, v1.1, mars 2026 ; anglais, traduit). Corrigé par la source 10. Apporte, conservés : l'énoncé, l'équation de la vorticité, le trou de Sobolev et la circularité du bootstrap, les résultats de Leray, Caffarelli, Kohn et Nirenberg, Escauriaza, Seregin et Šverák, le théorème du pivot, l'argument de la base, le pli universel, les sept convergences (renvoyées au Volume 2), la Prédiction spectrale et son contexte, les lectures des orbites ouvertes et de la couche limite, la note épistémologique comme citation (chapitre 9) ; retirés : annexe B.4. Sa dédicace : « À Sophie, mon ancre dans la tempête. À Soleil, Delfine, Justin et Yanie, qui portent déjà la Mémoire. À Hippase, qui s'est noyé pour la vérité des nombres. »
10. **NavierStokes\_DVP\_v1\_2\_Erratum\_source.txt** (*Navier-Stokes DVP, erratum*

v1.2 : *le fluide forcé se brise*, 27 septembre 2026). Fait foi pour Navier-Stokes. Apporte : le fait daté du 8 septembre 2026, les retraits nominatifs et leurs lignes de remplacement, la promotion du demi relu comme la porte, la lecture de la spirale et de l'eau qui respecte sa création, la Prédiction P-NS-1 et son critère, l'épigraphie et la dédicace finale (chapitre 9 ; annexe B.4.1).

11. **Bastos\_YangMills\_MassGap\_v1\_March20261.txt** (*Le gap de masse de Yang-Mills : non-fermeture cadastrale, théorème tripartite*, v1.0, mars 2026 ; anglais, traduit). Apporte l'essentiel du chapitre 10 : la déclaration de portée (pas de construction au sens de Wightman), les deux cercles, le théorème de non-fermeture et sa table,  $SO(n)$ ,  $Sp(n)$ ,  $SO(8)$  et sa Prédiction, les groupes exceptionnels,  $E_8$  et 496, la classification tripartite,  $U(1)$ , la clôture du Modèle standard, le test d'unicité, le Higgs, le gluon comme 8 privé de son 1, la liberté asymptotique et les quatre distances, les niveaux 1 et 2, les critères de chute, la conclusion ; rétrogradations : annexe B.5.
12. **Popper\_et\_le\_fond\_du\_marais\_v0\_1\_source.txt** (*Popper et le fond du marais : la chute, le relèvement, et ce qui ne peut pas tomber*, v0.1, 8 octobre 2026 ; Registre R.160). Apporte tout le chapitre 11 : Popper et le marais, les trois arguments, les trois comptes complets, les croisements forcés, la paire inverse, les statuts, le dogme et le compte, Goldbach, « tomber et se relever », « pour un enfant ».
13. **Positions\_tenues\_2026.txt** (positions tenues par l'auteur, septembre et octobre 2026). Apporte, comme citations ou thèses de l'auteur : sur Riemann (9 octobre 2026 : « on a résolu Riemann en montrant son impossibilité, c'est cent fois plus fort » ; le prolongement qui « tire vers l'arrière en même temps ») aux chapitres 1 et 3 ; sur Navier-Stokes et Yang-Mills (12 octobre 2026 : la quatrième dimension ; les IA et les conventions défectueuses) aux chapitres 1 et 10 ; sur P contre NP (12 octobre 2026 : le local-global, la contrainte et le prix duels, l'image de l'entraîneur) au chapitre 8 ; la définition de la preuve, « la cohérence se déballe... » et « la vie est une chute contrôlée » au chapitre 11 ; la distinction du zéro de clôture et du zéro d'exhaustion aux chapitres 2 et 3. Les autres positions de ce fichier (le pouvoir, la Bible, le cancer, la spirale du soleil, le sablier des paires et la borne de Tsirelson, la topologie, les cinq brins, la publication) relèvent d'autres volumes et ne sont pas versées ici.
14. **Trois\_questions\_non\_avenues\_v0\_1.pdf**. *Trois questions non avenues*, 31 juillet 2026. Apport : Chapitre 12. Trois questions non avenues : Riemann, Collatz, Goldbach, en entier, mot pour mot (26 octobre 2026).

# Annexe D. Vérifications refaites

Toutes les vérifications ci-dessous ont été refaites pour ce volume par le script `verif.py` (Python 3, fractions, numpy, scipy), exécuté le 15 octobre 2026 ; toutes passent. Les calculs sur  $\pi$  et sur les polynômes sont exacts (fractions) ; ceux sur  $\zeta$  sont numériques en double précision.

**$\pi$  (chapitre 2).** - Fraction continue de  $\pi$ , douze quotients [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1], identiques sur les deux bornes d'un encadrement de  $\pi$  à  $10^{-75}$  ; réduites 22/7, 333/106, 355/113, 103 993/33 102. - Archimède :  $223/71 < \pi < 22/7$ , exact. - Dalzell : quotient  $x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4$  et reste  $-4$  en fractions exactes ; aire du quotient 22/7 ; aire de  $x^4(1 - x)^4$  égale à  $1/630 = 4! 4!/9!$  ;  $22/7 - \pi = 0,0012644892673$ , entre  $1/1260$  et  $1/630$ . - Lucas : quotient d'aire 355/113, reste  $-4$  ; écart  $2,6676 \times 10^{-7}$ . - Invariance de  $x^4(1 - x)^4$  sous  $x \mapsto 1 - x$ , coefficient par coefficient ; maximum  $1/256$  en  $1/2$ .

**$\zeta$  (chapitres 3 et 4).** -  $|\zeta(\rho_1)| = 3,9 \times 10^{-15}$ . - Euler à  $\sigma = 1,1$ ,  $0 \leq t \leq 200$  :  $\min |\zeta| = 0,3769 > \zeta(2,2)/\zeta(1,1) = 0,1408$ . -  $|S_n(\rho_1)| = 2,24 ; 22,36 ; 70,70 ; 223,58$  pour  $N = 10^3, 10^5, 10^6, 10^7$  ;  $|1 - \rho_1| = 14,14$ . - Écart somme moins aire en  $N = 10^7$  :  $1,581 \times 10^{-4}$ , conforme à  $1/(2\sqrt{N})$  ; après le demi-terme :  $3,72 \times 10^{-11}$ . - Corollaire du zéro :  $1/(\rho_1 - 1)$  et  $\int_1^\infty \{x\} x^{-\rho_1-1} dx$  égaux à  $2,6 \times 10^{-12}$  près (la source donnait  $3 \times 10^{-12}$ ). Formule d'Abel en  $s = 2$  :  $\pi^2/6$ . - Hermite :  $\pi^2/6$  en  $s = 2$  ;  $|\zeta(\rho_1)|$  par Hermite  $8,4 \times 10^{-15}$  (la source donnait  $4,5 \times 10^{-12}$ , selon la quadrature) ; part du continu  $1/2 + 1/(\rho_1 - 1) = 0,4975 - 0,0707 i$ . - Porte (iii) :  $\eta(2) = \pi^2/12$ .  $|1 - 2^{\{1-\rho_1\}}| = 2,37$  ;  $|1 - 2^{\{1-s\}}| \geq 2^{\{1-\sigma\}} - 1 > 0$  sur une grille de la bande. - Produits partiels d'Euler en  $\rho_1$  sur les premiers jusqu'à  $2 \times 10^6$  : module entre  $9,4 \times 10^{-5}$  et  $18,76$ , sans limite ;  $\min |1 - p^{\{-\rho_1\}}| = 0,806$  pour  $p \leq 2 \times 10^5$ . -  $\Lambda$  réelle sur la droite :  $|\text{Im}/\text{Re}| \leq 8,6 \times 10^{-14}$  ; à  $\sigma = 0,7$ ,  $\geq 0,13$  ;  $\Lambda(0,3 + 2i) = \Lambda(0,7 - 2i)$  à  $10^{-12}$ . -  $\zeta(1/2) = -1,46035$  ;  $\zeta(\sigma) < 0$  pour  $\sigma$  de  $0,01$  à  $0,99$ . - Mertens à  $10^6$  :  $A = 304\,069$ ,  $B = 303\,857$ ,  $A + B = 607\,926$ ,  $6N/\pi^2$  arrondi à  $607\,927$ ,  $M = 212$  ;  $A(10) = 3$ ,  $B(10) = 4$  ;  $\max |M|/\sqrt{N} = 0,89$ , atteint en  $N = 5$ . - Lagarias de  $2$  à  $100\,000$  : aucune violation, marge minimale  $1,14\%$  en  $n = 12$ . - Jacobi en  $x = 0,5$  et  $1,7$  à  $10^{-12}$  ;  $\int e^{\{-4\pi x\}} x^{\{1/2\}} dx = \Gamma(3/2) \pi^{\{-3/2\}}/8 = 0,0198943679$ . -  $2n = n^2$  seulement en  $n = 2$  (jusqu'à  $10\,000$ ) ;  $\text{DR}(x^2) = \text{DR}((9 - x)^2)$  pour  $x = 1$  à  $8$ , quatre racines ;  $2x - 9$  ne s'annule qu'en  $4,5$ .

**Produit d'Euler (chapitre 5).** - Produit déplié sur les premiers jusqu'à  $2000$  : chaque entier de  $1$  à  $2000$  sort exactement une fois. - Produit pour  $s = 2$  sur les premiers  $< 2 \times 10^5$  :  $1,6449334415$ , à moins de  $10^{-6}$  de  $\pi^2/6$ . - Axe  $\pi^2/54$ , rails  $4\pi^2/27$ , grille  $\pi^2/9$  (sommes jusqu'à  $10^6$ ) ; multiples de  $3 =$  racines  $3, 6, 9$  et « ni pair ni multiple de  $3$  »  $= 6k \pm 1$ , jusqu'à  $100\,000$ . - Les quatre familles de composés de la grille, pour  $k$  de  $1$

à 20 000 ;  $35 = 6 \times 6 - 1$ , première rencontre de 5 et 7. - Briques 2 et 3 alternées : absents de 1 à 30 exactement  $\{1, 4\}$ .

**Yang-Mills (chapitre 10).** -  $DR(n) + DR(n^2 - 1) \in \{5, 10, 11, 14, 17\}$  pour  $2 \leq n \leq 10^6$  ; table des neuf classes. -  $SO(n)$  et  $Sp(n)$  :  $S = 9$  exactement quand  $DR(n) = 8$ , avec  $DR(\dim) = 1$ , pour  $n \leq 10\,000$  (la source s'arrêtait à 81). - Exceptionnels :  $S = 7, 11, 12, 14, 13$ . Modèle standard :  $2 + 5 + 11 = 18$  ; rangs 6 ; dimensions 12, de racine 3 ; produit 24. - Test d'unicité : 11 triples sur 84, dont (1, 2, 3) le premier ; la liste complète est donnée en [10.21]. -  $p^2 - 1$  divisible par 24 pour tout premier  $5 \leq p < 10^5$  ; 496 parfait.

**Navier-Stokes (chapitre 9).** - Loi d'échelle :  $1 + a = 3$  donne  $a = 2$  ; noyau de la chaleur  $G(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^{-3} G(x, t)$  à  $10^{-15}$ . -  $p^* = 6$  en  $d = 3$ , 4 en  $d = 4$  ;  $3/2 - 1 = 1/2$ . - Pivot : 4,5 est le seul pivot qui ferme. - **Précision** : les bases  $b \leq 5000$  qui satisfont  $b - 2$  puissance de 2,  $b - 1$  composé,  $b + 1$  premier et  $b$  pair sont 10, 66, 130, 4098 ; avec la clôture carrée  $b - 1 = p^2$ , seule 10 reste (balayage jusqu'à  $10^7$ , et démonstration générale, Volume 2, É 3.3) (annexe B.4.2). - **Correction** : le pli universel  $DR(ak) + DR((9 - a)k) = 9$  vaut pour  $a \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$  et  $k = 1$  à 8 ; pour la paire (3, 6), les colonnes  $\times 3$  et  $\times 6$  donnent 18 (annexe B.4.2). -  $-(\ln 2 + 2) = -2,693$  ;  $(1/2)^{\ln x} = x^{-\ln 2}$  ; la valeur attendue de  $|\cos \theta|$  sur la sphère vaut  $1/2$  ;  $4\pi R^2 \times 1/2 \times 2R/3 = (4/3)\pi R^3$ .

**P contre NP (chapitres 7 et 8).** - 3 ne divise aucun  $2^k$ ,  $k \leq 200$  ; pré-image de 0 de  $x_1 \wedge x_2 : 3 \times 2^{\{n-2\}}$ , jamais puissance de 2,  $n = 2$  à 20 ; les sous-espaces de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$  ont pour cardinaux  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ . - Lemme de la partition :  $2^a + 2^b = 2^n$  impose  $a = b = n - 1$  ( $n \leq 30$ ). -  $9! = 362\,880$ ,  $\log_2 9! = 18,47$  ;  $\times k$  bijectif sur les neuf positions exactement pour  $k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$ . - Produits consécutifs : racines  $\{2, 3, 6, 9\}$  pour  $k = 2$ ,  $\{3, 6, 9\}$  pour  $k = 3$  à 5,  $\{9\}$  pour  $k \geq 6$  ( $n < 5000$ ). - Tours de  $1/3$  : 0, 0, 1, 2, 5, 10, 21, 42, 85 ; remontée sans reste. Pli de  $1/1\,000\,003$  : 4000 bits, 1952 uns (écart de 2,4 % à l'équilibre), égaux à l'écriture de  $[2^{4000}/1\,000\,003]$ . - Compte de Shannon pour  $n = 20$  : avec la majoration  $(16(n + s)^2)^s$  du nombre de circuits,  $s = 30\,985$  est la plus grande taille insuffisante. -  $a + b + c = 2$  maj + min sur les 8 triplets ;  $a + b = 2(a \wedge b) + (a \oplus b) = (a \vee b) + (a \wedge b)$  sur les 4 couples. - Relations sans pôles : arité 3,  $24 / 24 / 0 / 15$  sur 63 ; arité 4,  $168 / 1472 / 21 / 14\,722$  sur 16 383, dont 4 par le ET et 4 par le OU ; frontière en arité 4, 15 565 relations sans position figée,  $34 / 1068 / 13 / 14\,450$ , aucune par le ET ou le OU. - 1-dans-3 : comptes 0 à 3 portés par 1, 3, 3, 1 configurations. - Trios par programmation linéaire : fractionnaire  $3/2$ , prix  $3/2$ , entier 1 ; après sacrifice,  $1 = 1$ . Anneaux de 3 à 11 trios : fractionnaire  $r + 1/2$ , entier  $r$  ; après un retrait,  $r = r$ . Couplage biparti : fractionnaire égal à l'entier sur 60 instances. - Cadre :  $4(n - 1) = n(n - 1)/2$  seulement pour  $n = 8$  ( $2 \leq n \leq 99$ ) ;  $28 + 36 = 64$  ;  $C(8, 2) = 28$ .

**Popper (chapitre 11).** - Fibonacci en racines : 81 états, pas bijectif, période 24 depuis (1, 1). - Collatz : 3 et 7 se rejoignent en 10 par le chemin 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20. - Tiroirs : sur les 81 placements de 4 marcheurs sur 3 cases, deux marcheurs partagent toujours une case. - Goldbach : tout pair de 4 à 10 000 est somme de deux premiers.

Non refaits ici, et repris des pièces sources avec leur reçu : la largeur de résolution des 200 instances 2-CNF, l'accord du graphe d'implication de 2-SAT avec la force brute

sur 300 instances, les 295 instances bipartites de la pièce source, la vérification de la formule d'Abel en  $s = 0,3 + 2i$ , et l'injectivité de l'adresse jusqu'à  $10^5$  (immédiate par la division).

---

*Modèle, questions, lectures et règles : Filipe Bastos. Scribe : Claude, sous la contradiction de l'auteur. Calculs, formulations et audits assistés par IA (ChatGPT, Gemini, DeepSeek, GLM), à sa demande.*

*Corpus ARC, Filipe Bastos, CC BY 4.0.*